

Глава 2. Квазиклассическая теория дипольных переходов в двухуровневой системе [3,4]

2.1. Резонансное приближение

Несмотря на сложный характер энергетического спектра реальных веществ, для описания взаимодействия с ними монохроматического оптического излучения часто оказывается возможным использование двухуровневой модели. При таком подходе из всего набора уровней включаются в рассмотрение только те два, энергии которых E_m и E_n удовлетворяют резонансному условию

$$\frac{E_m - E_n}{\hbar} - \omega \ll \omega, \omega_{mn}, \quad (2.1.1)$$

где ω – частота световой волны. Это условие означает, что световая волна ω близка к частоте ω_{mn} энергетического кванта $\hbar\omega_{mn}$, равного разности энергий $E_m - E_n$. Резонансное приближение остается справедливым при условии незначительности возмущения полем излучения собственных частот оптического электрона. Для сохранения резонансного характера взаимодействия электрона со световой волной необходимо, чтобы напряженность поля \mathcal{E} не превышала атомную E_{am} (или приближалась к ней):

$$\mathcal{E} \ll E_{am}. \quad (2.1.2)$$

Заметим, что условию (2) удовлетворяют как слабые оптические поля, практически не меняющие заселенности энергетических уровней, так и сильные поля, приводящие к весьма существенному перераспределению электронов по энергетическим состояниям.

В рамках двухуровневой модели сохраняется возможность феноменологически учесть и переходы, которые могут происходить с этих двух уровней на некоторые другие. Эти переходы бывают радиационные и столкновительные. Их характер будет определять механизм релаксации, играющий важную роль при формировании однородно уширенной линии перехода.

Для определения вероятностей оптических переходов в «двухуровневом атоме» мы воспользуемся двумя уравнениями из системы (1.2.11) для коэффициентов a_{nn} и a_{nm} :

$$i\hbar \frac{da_{nn}}{dt} = a_{nm} \langle n | \hat{V} | m \rangle \exp(-i\omega_{mn}t), \quad (2.1.3)$$

$$i\hbar \frac{da_{nm}}{dt} = a_m \langle m | \hat{V} | n \rangle \exp(i\omega_{mn}t). \quad (2.1.4)$$

Однако извлечь с помощью этих уравнений конкретную информацию о поведении указанных коэффициентов можно лишь, определив структуру оператора \hat{V} , поэтому рассмотрим подробнее вопрос о гамильтониане атома в световом поле.

2.2. Гамильтониан атома в поле излучения

Вначале положим, что атом включает единственный электрон. В курсах электродинамики для гамильтониана электрона, движущегося в поле ядра, выводится следующее выражение:

$$H = \frac{1}{2m}(\bar{p} + e\bar{A})^2 + u - e\Phi. \quad (2.2.1)$$

Здесь e и m – соответственно абсолютная величина заряда и масса электрона, \bar{p} – его канонический импульс, равный $\bar{p} = m\bar{r}$ (\bar{r} – радиус-вектор электрона), u – эффективный потенциал ядра, Φ и \bar{A} – соответственно скалярный и векторный потенциалы внешнего электромагнитного поля. В свободной от зарядов области можно выбрать систему координат таким образом, чтобы скалярный потенциал обращался в нуль. При этом магнитная индукция \bar{B} и напряженность электрического поля \bar{E} электромагнитной волны будут выражаться через векторный потенциал с помощью соотношений:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}; \quad \bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}. \quad (2.2.2)$$

Из-за малых размеров атома относительно световой длины волны изменение \bar{A} в пределах атома незначительно. Поэтому удобно использовать разложение векторного потенциала \bar{A} в ряд Тейлора относительно положения ядра \bar{R} (см. рис.2.1)

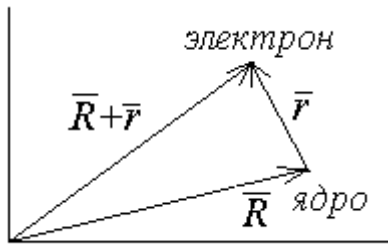


Рис.2.1. Графическая иллюстрация к разложению вектора-потенциала.

$$\bar{A}(\bar{R} + \bar{r}, t) = \bar{A}(\bar{R}, t) + (\bar{r} \nabla_k) \bar{A}(\bar{R}, t) + \dots \quad (2.2.3)$$

Используя формулы (2),(3), выражению (1) можно придать вид

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2m} + u + \bar{\mu} \bar{E}(\bar{R}, t) - \bar{m} \bar{B}(\bar{R}, t) + \frac{e}{2} \bar{r} \cdot \bar{r} \cdot \nabla_R E(\bar{R}, t) + \frac{e^2}{8m} [\bar{r} \times \bar{B}(\bar{R}, t)]^2. \quad (2.2.4)$$

Здесь $\bar{\mu} = -e\bar{r}$ – электрический дипольный момент атома; \bar{m} – магнитный момент, связанный с механическим моментом импульса электрона $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$ соотношением $\bar{m} = -(e/2m)\bar{L}$.

В выражении (4) первые два члена определяют невозмущенный гамильтониан в отсутствие внешне световой волны. Третий и четвертый члены характеризуют электрическое магнитное дипольные взаимодействия. Пятый член соответствует так называемому квадрупольному взаимодействию. Шестой член учитывает энергию взаимодействия, связанную с диамагнитными свойствами атома.

В принципе, привлекая дополнительные члены в разложении (3), можно учесть в гамильтониане взаимодействия еще более высокого порядка. Однако на практике привлечение этих взаимодействий осуществляется весьма редко, поскольку их интенсивность резко падает с увеличением порядка. Мало того, в подавляющем большинстве случаев бывает достаточно ограничиться учетом электрического дипольного взаимодействия; и лишь тогда, когда он обращается в ноль, имеет смысл учитывать моменты более высокого порядка. В дальнейшем мы сосредоточим внимание, в основном, на электрическом дипольном взаимодействии. Однако метод, которому мы будем следовать, допускает обобщение и на другие случаи.

При электрическом дипольном взаимодействии полученное выше выражение для гамильтониана можно обобщить и на атом, состоящий из многих электронов. Суммируя энергии всех электронов, получаем

$$H = \frac{1}{2m} \sum_K [\bar{p}_K^2 + u(\bar{r}_K)] + \bar{\mu}\bar{E}, \quad (2.2.5)$$

где $\bar{\mu} = -e \sum_K \bar{r}_K$ – электрический дипольный момент всей системы, потенциальная энергия $u(\bar{r}_K)$ будет определяться кулоновским взаимодействием как между отдельными электронами с координатами \bar{r}_K , так и взаимодействием электронов с ядрами. Таким образом, можно считать, что невозмущенный гамильтониан (в отсутствие внешнего поля)

$$H_0 = \frac{1}{2m} \sum_K [\bar{p}_K^2 + u(\bar{r}_K)], \quad (2.2.6)$$

а гамильтониан взаимодействия

$$V = -\bar{\mu}\bar{E}. \quad (2.2.7)$$

Получив классические выражения для гамильтониана невозмущенной системы, а также гамильтониана взаимодействия, несложно построить с их помощью операторы H_0 и V . Делается это, как известно, путем следующих замен:

$$\bar{r} \rightarrow \bar{r}; \quad \bar{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \bar{r}}. \quad (2.2.8)$$

Располагая теперь видом операторов Гамильтона, мы можем вернуться к вопросу о поведении вероятностных коэффициентов a_{nn} и a_{nm} .

2.3. Осцилляции заселенностей в резонансном поле

Пусть электрическая компонента поля световой волны

$$E(t) = \mathcal{E} \cos \omega t = \frac{1}{2} \mathcal{E} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (2.3.1)$$

дипольно взаимодействует с двухуровневой микросистемой. Для характеристики вероятностей оптических переходов воспользуемся уравнениями (2.1.3) и (2.1.4). Для простоты переобозначим $a_{nn} \rightarrow a_1$, $a_{nm} \rightarrow a_2$. n -й (нижний) уровень будем считать первым, m -й (верхний) – вторым. Согласно (2.2.7) оператор возмущения в поле (1) будет иметь вид

$$\hat{V} = -\frac{\mu}{2} \mathcal{E} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (2.3.2)$$

Для простоты считается, что векторы $\bar{\mu}$ и $\bar{\mathcal{E}}$ параллельны.

При таком задании оператора \hat{V} получаем следующие выражения для его матричных элементов:

$$\langle m | \hat{V} | n \rangle = -\frac{1}{2} \mathcal{E} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \mu_{12}, \quad (2.3.3)$$

$$\langle n | \hat{V} | m \rangle = -\frac{1}{2} \mathcal{E} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \mu_{21}, \quad (2.3.4)$$

где

$$\mu_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^* \mu \varphi_2 dq = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2^* \mu \varphi_1 dq = \mu_{21} \quad (2.3.5)$$

матричные элементы оператора дипольного момента перехода¹. С учетом (3), (4) и вновь вводимых обозначений преобразуем уравнения (2.1.3) и (2.1.4) к виду

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} = -\frac{1}{2} a_2 [\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)] \exp(-i\omega_{21}t) \mathcal{E} \mu_{12}, \quad (2.3.6)$$

$$i\hbar \frac{da_2}{dt} = -\frac{1}{2} a_1 [\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)] \exp(i\omega_{21}t) \mathcal{E} \mu_{12} \quad (2.3.7)$$

¹ Заметим, что равенство (5), выполняется лишь при определенном выборе системы координат.

Преобразуем указанные уравнения, опуская быстро осциллирующие члены типа $\exp(\pm 2i\omega t)$ и полагая в соответствии с резонансным условием (2.1.1) расстройку частот $\Delta = \omega_{21} - \omega \ll \omega_{21}, \omega$. Тогда

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} = -\frac{1}{2} \mu_{12} \mathcal{E} a_2 \exp[-i(\omega_{21} - \omega)t], \quad (2.3.8)$$

$$i\hbar \frac{da_2}{dt} = -\frac{1}{2} \mu_{12} \mathcal{E} a_1 \exp[i(\omega_{21} - \omega)t]. \quad (2.3.9)$$

Введем теперь посредством соотношений

$$a_1 = \psi_1 \exp(-i \frac{\omega_{21} - \omega}{2} t), \quad a_2 = \psi_2 \exp(i \frac{\omega_{21} - \omega}{2} t) \quad (2.3.10)$$

амплитуды ψ_1 и ψ_2 меняющихся во времени коэффициентов a_1, a_2 . Рассматривая ψ_1 и ψ_2 в качестве новых неизвестных, получаем для них из (8) и (9) следующие уравнения:

$$i\hbar \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{1}{2} (\hbar\omega_{21} - \hbar\omega) \psi_1 - \frac{1}{2} \mu_{12} \mathcal{E} \psi_2, \quad (2.3.11)$$

$$i\hbar \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{1}{2} (\hbar\omega_{21} - \hbar\omega) \psi_2 - \frac{1}{2} \mu_{12} \mathcal{E} \psi_1. \quad (2.3.12)$$

Если считать, что в начальный момент времени $t=0$ (момент включения светового поля с постоянной амплитудой \mathcal{E}_0) $\psi_1=1, \psi_2=0$, то решения уравнений (11) и (12) имеют вид

$$\psi_1 = \cos \Omega t + i \frac{\omega_{21} - \omega}{2\Omega} \sin \Omega t, \quad (2.3.13)$$

$$\psi_2 = i \frac{\mu_{12} \mathcal{E}_0}{4\hbar\Omega} \sin \Omega t, \quad (2.3.14)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{2} \hbar \left[(\hbar\omega - \hbar\omega_{21})^2 + (\mu_{12} \mathcal{E}_0)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.3.15)$$

Получив явные выражения для величин ψ_1 и ψ_2 , а стало быть, и для коэффициентов a_1, a_2 , мы теперь можем определить динамику заселенностей уровней в поле световой волны. Так, вероятности обнаружить атом на первом на втором уровня будут соответственно равны

$$\rho_{11} = a_1 a_1^* = \psi_1 \psi_1^*, \quad (2.3.16)$$

$$\rho_{22} = a_2 a_2^* = \psi_2 \psi_2^*. \quad (2.3.17)$$

Если объемная плотность атомов равна N , то в единице объема на первом уровне будет находиться число атомов:

$$N_1 = N\rho_{11}, \quad (2.3.18)$$

а на втором –

$$N_2 = N\rho_{22}. \quad (2.3.19)$$

С помощью (14) и (17) найдем, что

$$\rho_{22} = \frac{\mu_{12}^2 \mathcal{E}_0^2}{8\hbar^2 \Omega^2} (1 - \cos 2\Omega t). \quad (2.3.20)$$

Из последнего выражения видно, что вероятность ρ_{22} имеет составляющую, осциллирующую с частотой 2Ω . Придавая этой частоте вид

$$\Omega = (\Delta^2 + \Omega_0^2)^{1/2} / 2, \quad (2.3.21)$$

где Ω_0 – так называемая частота Раби, равная

$$\Omega_0 = \mu_{12} \mathcal{E}_0 / \hbar, \quad (2.3.22)$$

можно (20) переписать следующим образом:

$$\rho_{22} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0^2}{\Delta^2 + \Omega_0^2} (1 - \cos 2\Omega t). \quad (2.3.23)$$

Отсюда следует, что вероятность заселения верхнего уровня осциллирует во времени между нулем и некоторым максимальным значением, зависящим как от расстройки, так и от частоты Раби.

Если расстройка большая (или интенсивность излучения невелика), то (23) преобразуется к виду

$$\rho_{22} = \Omega_0^2 (1 - \cos \Delta t) / 2\Delta^2; \quad (2.3.24)$$

в другом крайнем случае, когда расстройка мала (высокая интенсивность излучения)

$$\rho_{22} = (1 - \cos \Omega_0 t) / 2. \quad (2.3.25)$$

Из (24) и (25) следует, что при больших расстройках осцилляции происходят на частоте расстройки, и вероятность нахождения атома на верхнем уровне никогда не достигает единицы. При малых расстройках вероятность ρ_{22} осциллирует на частоте Раби, изменяясь в пределах от нуля до единицы.

Важно отметить, что в случае точного резонанса вероятность обнаружения атома в верхнем состоянии достигает единицы и при слабом и при сильном полях. При слабом поле, однако, атом переходит в верхнее состояние за очень длительное время (естественно, это время должно оставаться в пределах временного интервала, на котором релаксационные процессы играют незначительную роль).

Полученные выражения для вероятности ρ_{22} и комментарии к ним могут быть использованы и для анализа поведения вероятности ρ_{11} , поскольку между ними существует простая связь:

$$\rho_{11} = 1 - \rho_{22} \quad (2.3.26)$$

(двухуровневый атом может находиться лишь в двух состояниях).

Обратимся еще раз к зависимости (23). Из нее видно, что эффективная ширина полосы, в которой монохроматическое излучение с частотой ω взаимодействует с системой, обладающей резонансной частотой ω_{21} , является функцией интенсивности световой волны. Чем больше поток излучения, тем шире полоса, в которой оно взаимодействует с системой. Спектральная зависимость вероятности заселения верхнего уровня $\Omega_0^2 / (\Delta^2 + \Omega_0^2)$ является лоренцевской, причем частота Раби играет в ней роль однородной ширины. Таким образом, в отсутствие релаксационных процессов можно говорить о динамическом полевом уширении перехода, равном $\mu_{12} \mathcal{E}_0 / \hbar$ (динамический эффект Штарка).

2.4. Поляризация среды при интенсивном взаимодействии

Перейдем теперь к вопросу о поляризации вещества, наводимой переменным электромагнитным полем. Найдем сначала дипольный момент отдельного атома. Согласно постулатам квантовой механики среднее значение (или математическое ожидание) дипольного момента должно находиться из соотношения:

$$\langle \hat{\mu} \rangle = \int \Psi^* \hat{\mu} \Psi dq. \quad (2.4.1)$$

В случае двухуровневой системы ее "возмущенная" волновая функция Ψ^a должна складываться из "невозмущенных" функций Ψ_1 и Ψ_2

$$\Psi^a = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2 \quad (2.4.2)$$

(см. формулу (1.2.2)). Учитывая выражения (1.2.4), из (1), получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mu} \rangle = & \psi_1 \psi_1^* \int \varphi_1 \hat{\mu} \varphi_1^* dq + \psi_1 \psi_2^* e^{i\omega t} \int \varphi_1 \hat{\mu} \varphi_2^* dq + \\ & + \psi_2 \psi_1^* e^{-i\omega t} \int \varphi_2 \hat{\mu} \varphi_1^* dq + \psi_2 \psi_2^* \int \varphi_2 \hat{\mu} \varphi_2^* dq \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Поскольку оператор дипольного момента $\langle \mu \rangle$ является нечетной функцией координаты, то первый и последний интегралы в правой части (3) обращаются в ноль. Воспользовавшись определением матричных элементов (2.3.5), в результате получим

$$\langle \hat{\mu} \rangle = \mu_{12} (\Psi_1 \Psi_2^* e^{i\omega t} + \Psi_2 \Psi_1^* e^{-i\omega t}). \quad (2.4.4)$$

Введем символы:

$$\rho_{12} = \Psi_1 \Psi_2^*, \quad (2.4.5)$$

$$\rho_{21} = \Psi_2 \Psi_1^*, \quad (2.4.6)$$

обладающие свойством $\rho_{12} = \rho_{21}^*$. Вместе с символами ρ_{11} и ρ_{22} (см. (2.3.16) и (2.3.17)) они формируют матрицу

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.4.7)$$

весьма удобную для математического описания процессов взаимодействия. Согласно (4) ее недиагональные элементы определяют величину и динамику дипольного момента атома.

Исходя из (2.3.13) и (2.3.14), можно показать, что

$$\rho_{12} = \frac{\Omega_0}{4\Omega} \left(\frac{\Delta}{\Omega} \sin^2 \Omega t - i \sin 2\Omega t \right). \quad (2.4.8)$$

Используя теперь выражения (4)–(6), получаем

$$\langle \mu \rangle = \frac{\mu_{12} \Omega_0 \Delta}{\Omega_0^2 + \Delta^2} (1 - \cos 2\Omega t) \cos \omega t + \frac{\mu_{12} \Omega_0}{(\Omega_0^2 + \Delta^2)^{1/2}} \sin 2\Omega t \sin \omega t. \quad (2.4.9)$$

Поляризация среды, т.е. сумма дипольных моментов в единице объема равна при этом

$$P = N \langle \mu \rangle. \quad (2.4.10)$$

Из (9)–(10) видно, что поляризация среды осциллирует на частоте поля; причем она имеет две компоненты: одна из них (первое слагаемое в (9)) осциллирует в фазе с полем, другая (второе слагаемое в (9)) – сдвинута по фазе относительно колебаний поля на $\pi/2$. Когда расстройка по частотам отсутствует и $\Delta = 0$, синфазная компонента исчезает.

Наведенная световой волной поляризация оказывает на волну обратное воздействие. Вещество начинает излучать вторичные волны, интенсивность которых определяется значением второй производной поляризации по времени, которая в свою очередь в резонансе будет пропорциональна

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \sim N \mu_{12} \omega^2 \sin \Omega_0 t \sin \omega t. \quad (2.4.11)$$

Наличие в выражении (11) множителя $\sin \Omega_0 t$, медленно изменяющегося по сравнению с частотой световых колебаний, будет приводить к медленным (с частотой Раби) изменениям напряженности результирующего поля вторичных световых волн. Такие изменения получили название световых нутаций. Отметим, что измерение частоты нутаций лежит в основе наиболее точного метода определения матричного элемента оператора дипольного момента.

2.5. Импульсное воздействие

Рассмотрев процессы, возникающие при взаимодействии непрерывного поля с веществом, перейдем к анализу особенностей импульсного воздействия. Зададим напряженность поля в виде

$$E(t) = \mathcal{E}(t) \cos \omega t \quad (2.5.1)$$

и будем считать, что амплитуда поля $\mathcal{E}(t)$ изменяется достаточно медленно (по сравнению с временем ω^{-1}). Для полей с изменяющейся во времени амплитудой уравнения (2.3.11) и (2.3.12), вообще говоря, не имеют аналитических решений. Исключение составляет случай точного резонанса ($\omega = \omega_{21}$). Перепишем для этого случая указанные уравнения

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{2} \psi_2, \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{2} \psi_1. \quad (2.5.2)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\psi_1 = \cos \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{2\hbar} dt, \quad \psi_2 = i \sin \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{2\hbar} dt. \quad (2.5.3)$$

С их помощью для вероятностей заселенностей нижнего и верхнего уровней получаем следующие выражения:

$$\rho_{11} = \psi_1 \psi_1^* = \cos^2 \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{2\hbar} dt = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt \right), \quad (2.5.4)$$

$$\rho_{22} = \psi_2 \psi_2^* = \sin^2 \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{2\hbar} dt = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt \right). \quad (2.5.5)$$

Вычисляя недиагональный элемент матрицы (2.4.7)

$$\rho_{12} = \psi_1 \psi_2^* = -\frac{1}{2} i \sin^2 \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt, \quad (2.5.6)$$

можно согласно (2.4.4) определить поляризацию среды

$$P = N \langle \mu \rangle = N \mu_{12} \sin \omega t \sin \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt. \quad (2.5.7)$$

Из формул (4), (5), (7) видно, что все наиболее важные характеристики вещества, через которое проходит световой импульс, определяются значением переменной

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt, \quad (2.5.8)$$

получившей название площади импульса в интервале от 0 до t . Величина же

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt \quad (2.5.9)$$

называется площадью под огибающей импульса или, просто, площадью импульса.

В теории взаимодействия излучения с веществом утверждение, что поведение микросистемы под действием резонансного поля определяется значением переменной $\theta(t)$, получило название теоремы площадей. Принято выделять импульсы, площади которых θ равны π (π -импульсы) и $\pi/2$ ($\pi/2$ -импульсы). Как следует из формул (4), (5), (7), при прохождении π -импульса через среду распределение заселенностей инвертируется ($\rho_{11} = 0$, $\rho_{22} = 1$), а поляризация остается нулевой. При прохождении же $\pi/2$ импульса заселенности уровней выравниваются, а поляризация среды оказывается максимальной.

После прекращения воздействия на среду непрерывным излучением или после прохождения через нее короткого резонансного импульса можно наблюдать затухание оптических нутаций. Затухание нутаций, как правило, обусловлено влиянием релаксационных процессов. Однако затухания возможны и при включенном световом поле. Рассмотрим этот процесс подробнее.

2.6. Когерентное затухание нутаций

Предположим, что атомы, взаимодействующие со светом, не являются абсолютно идентичными. Проанализируем случай, когда отличие атомов состоит в разбросе частот переходов от некоторого среднего значения. Разброс отстроек атомов будем характеризовать функцией $f(\Delta)$. Величина $f(\Delta)d\Delta$ задает вероятность попадания разности $\hbar\omega_{21} - \hbar\omega$ в интервал $\hbar(\Delta + d\Delta/2)$. С помощью формул (2.3.20) и (2.3.23) найдем среднюю по ансамблю вероятность заселения верхнего уровня

$$\langle \rho_{22} \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega_0^2}{\Delta^2 + \Omega_0^2} \left\{ 1 - \cos \left[\left(\Delta^2 + \Omega_0^2 \right)^{1/2} t \right] \right\} f(\Delta) d\Delta. \quad (2.6.1)$$

Если эффективная ширина распределения $f(\Delta)$ много больше $\Omega_0 = \mu_{12} \mathcal{E} / \hbar$, то интеграл (1) при больших временах ($\Omega_0 t \gg 1$) сводится к следующему асимптотическому выражению:

$$\langle \rho_{22} \rangle = \frac{\pi}{2} \Omega_0 f(0) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Omega_0 \frac{\cos \Omega_0 t}{(\Omega_0 t)^{1/2}} f(0). \quad (2.6.2)$$

Из него видно, что разброс частот переходов приводит к постепенному затуханию осцилляций заселенности верхнего уровня. При больших

времена вероятность заселения верхнего уровня будет стремиться к значению $\frac{\pi}{2}\Omega_0 f(0)$. Поскольку рассматриваемое затухание происходит в отсутствие каких-либо релаксационных процессов, принято говорить о когерентном затухании осцилляций Раби.

Если функция распределения имеет гауссову форму

$$f(\Delta) = \pi^{-1/2} \Delta^{-1} \exp(-\Delta^2 / \Delta_0^2). \quad (2.6.3)$$

с узкой эффективной шириной Δ_0 (много меньшей Ω_0), то несложно рассчитать разность $\delta\rho = \rho_{11} - \rho_{22} = 1 - 2\rho_{22}$. Ее среднее по ансамблю значение оказывается равным:

$$\langle \delta\rho \rangle = \left[1 + \left(\frac{\Delta_0^2}{2\Omega_0} t \right)^2 \right]^{-1/4} \cos \left[\frac{1}{2} \arctg \left(\frac{\Delta_0^2}{2\Omega_0} t \right) \right] \cos \Omega_0 t. \quad (2.6.4)$$

Из последней формулы следует, что разность заселенностей испытывает постепенно затухающие осцилляции, амплитуда которых уменьшается по закону $t^{-1/2}$. Таким образом, когерентное затухание осцилляций в заселенностях имеет место, как при широкой, так и при узкой функции распределения.

Рассмотрим теперь вопрос о затухании поляризации. Сделаем это для симметричной и широкой функции распределения $f(\Delta)$. Средний дипольный момент может быть найден путем интегрирования выражения (2.4.9) по всем расстройкам от $-\infty$ до $+\infty$. Поскольку из-за симметричности функции распределения первый член (2.4.9) при интегрировании даст нулевой вклад, находим, что

$$\langle \mu \rangle = \mu_{12} \Omega_0 \sin \omega t f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \left[(\Delta^2 + \Omega_0^2)^{1/2} t \right]}{(\Delta^2 + \Omega_0^2)^{1/2}} d\Delta. \quad (2.6.5)$$

Интеграл в (5) сводится к функции Бесселя и окончательное выражение для $\langle \mu \rangle$ принимает вид

$$\langle \mu \rangle = \pi \mu_{12} \Omega_0 f(0) \mathfrak{J}_0(\Omega_0 t) \sin \omega t. \quad (2.6.6)$$

Из него следует, что средний дипольный момент (и, в целом, поляризация), испытывал колебания, постепенно затухает в соответствии с поведением функции Бесселя нулевого порядка.

Таким образом, при разбросе частот переходов когерентное затухание осцилляций в одинаковой степени свойственно как заселенностям энергетических уровней, так и наведенной световой волной поляризации. Не прибегая к строгому доказательству, укажем в заключение, что эффекты когерентного затухания будут проявляться также и при наличии разброса по значениям матричных элементов в операторе перехода.

2.7. Фотонное эхо

Эффект фотонного эха является оптическим аналогом хорошо известного в радиоспектроскопии явления спинового эха. Он возникает при пропускании через среду двух импульсов излучения на частоте, соответствующей переходу между энергетическими уровнями. Для наблюдения эффекта необходим некоторый разброс частот переходов в атомах. Этот разброс мы по-прежнему будем характеризовать функцией распределения расстроек $f(\Delta)$ с шириной Δ_0 . Рассмотрим случай мощных и коротких импульсов, напряженности полей и длительности которых удовлетворяют соотношениям

$$\mu_{12}\mathcal{E}_0/\hbar \gg \Delta_0, \quad \Delta_0 \ll \tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}. \quad (2.7.1)$$

где τ_1 и τ_2 — длительности соответственно первого и второго импульсов. При выполнении условий (1) взаимодействие излучения с веществом в течение времени действия импульса можно рассматривать как строго резонансное и не учитывать разброс частот переходов. Тогда, согласно (2.5.3), к моменту окончания первого импульса функции ψ_1 и ψ_2 для отдельно атома имеют вид

$$\psi_1(t = \tau_1) = \cos(\theta_1/2), \quad \psi_2(t = \tau_1) = i \sin(\theta_1/2), \quad (2.7.2)$$

где

$$\theta_1 = \theta(\tau_1) = \int_0^{\tau_1} \frac{\mu_{12}\mathcal{E}(t)}{\hbar} dt. \quad (2.7.3)$$

Пусть временной интервал между импульсами τ превосходит длительность каждого из них ($\tau \gg \tau_1, \tau_2$). Значения ψ_1 и ψ_2 в конце этого интервала могут быть найдены из (2.3.11) и (2.3.12) при $\mathcal{E} = 0$:

$$\psi_1(t = \tau + \tau_1) = \exp(i\tau\Delta/2) \cos(\theta_1/2), \quad (2.7.4)$$

$$\psi_2(t = \tau + \tau_1) = i \exp(-i\tau\Delta/2) \sin(\theta_1/2). \quad (2.7.5)$$

С помощью уравнений (2.3.11) и (2.3.12) несложно найти функции ψ_1 и ψ_2 и после окончания второго импульса. Для этого необходимо их решать в предположении точного резонанса, считая, что (4) и (5) задают начальные условия. Результатом расчета будут следующие выражения:

$$\psi_1(t = \tau_2 + \tau + \tau_1) = \cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) \exp(i\Delta\tau/2) - \sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) \exp(-i\tau\Delta/2), \quad (2.7.6)$$

$$\psi_2(t = \tau_2 + \tau + \tau_1) = i \sin(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) \exp(-i\tau\Delta/2) + i \cos(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) \exp(i\tau\Delta/2), \quad (2.7.7)$$

где

$$\theta_2 = \int_0^{\tau_2} \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt. \quad (2.7.8)$$

Наконец, чтобы составить полное представление о поведении атома, облучаемого двумя последовательными импульсами, определим функции ψ_1 и ψ_2 через время T после окончания второго импульса. Действуя так же, как и при получении выражений (4) и (5), находим

$$\psi_1(t = T + \tau_2 + \tau + \tau_1) = \cos(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) \exp[i(T + \tau)\Delta/2] - \sin(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) \exp[-i(T - \tau)\Delta/2], \quad (2.7.9)$$

$$\psi_2(t = T + \tau_2 + \tau + \tau_1) = i \sin(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) \exp[-i(T + \tau)\Delta/2] + i \cos(\theta_1/2) \sin(\theta_2/2) \exp[i(T - \tau)\Delta/2]. \quad (2.7.10)$$

С помощью последних выражений и на основании (2.4.4) может быть рассчитан дипольный момент атома. При расчете следует иметь в виду, что члены в (9) и (10) в экспоненте которых стоит множитель $(T + \tau)$ осциллируют очень быстро и после усреднения по отстройкам исчезают. В результате получаем

$$\langle \mu \rangle = -\mu_{12} \sin \theta_1 \sin^2(\theta_2/2) \sin[\Delta(T - \tau) + \omega t]. \quad (2.7.11)$$

Отсюда видно, что величина дипольного момента зависит как от площади импульсов θ_1 и θ_2 , так и от величины отстройки Δ . Поскольку различные атомы имеют разные отстройки, то результирующий дипольный момент, составляющий поляризацию, практически обращается в ноль. Исключение составляет случай, когда $T = \tau$. Для него характерно равенство фаз колебаний всех диполей. Именно моменту времени $T = \tau$ соответствует интенсивный всплеск излучения резонансной среды, получивший название фотонного эха².

Убедиться в таком поведении поляризации можно на примере гауссового распределения расстройок, когда

$$f(\Delta) = \pi^{-\frac{1}{2}} \Delta^{-1} \exp(-\Delta^2 / \Delta_0^2). \quad (2.7.12)$$

Усреднение (11) по расстройкам в этом случае дает

$$\langle \mu \rangle = -\mu_{12} \sin \omega t \sin \theta_1 \sin^2(\theta_2/2) \exp\left[-\frac{\Delta_0^2}{4}(T - \tau)^2\right]. \quad (2.7.13)$$

² Фотонное эхо является следствием своеобразного "обращения" времени в рассматриваемой системе. Обращение происходит в силу инверсии заселенностей, возникающей под действием второго импульса. После прохождения этого импульса изменение параметров идет как бы в обратном порядке.

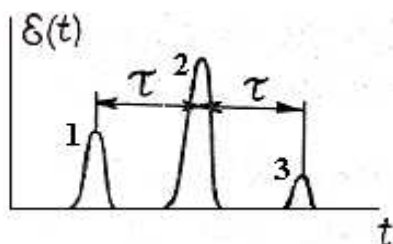


Рис.2.2. Расположение фотонного эха относительно импульсов накачки. 1- $\pi/2$ – импульс; 2- π – импульс, 3 – эхо.

Складывающаяся из таких дипольных моментов поляризация будет максимальна при $T = \tau$, что обусловит появление фотонного эха. Из последнего выражения также видно, что наибольшей интенсивностью фотонное эхо будет обладать, когда первый импульс является $\pi/2$ -импульсом ($\theta_1 = \pi/2$), второй – π -импульсом ($\theta_2 = \pi$).

Рис.2.2 графически иллюстрируют расположение импульсов накачки и фотонного эха. Поскольку в реальных средах процессы релаксации практически не устранимы с увеличением промежутка времени τ интенсивность эха будет уменьшаться. Причем затухание эха будет хорошо описываться экспоненциальной зависимостью $\exp(-2\tau/T_2)$, где T_2 — время так называемой поперечной релаксации, физический механизм которой будет описан в следующей главе.

Глава 3. Релаксационные процессы [5,6]

3.1. Формализм матрицы плотности. Продольная и поперечная релаксации

При получении наиболее важных соотношений в предыдущей главе использовались элементы матрицы (2.4.7), выражение через амплитуды Ψ_1 и Ψ_2 коэффициентов a_1 и a_2 с помощью (2.3.16), (2.3.17), (2.4.5), (2.4.6). При этом все расчеты строились на уравнениях (2.3.11) и (2.3.12), характеризующих динамику изменения величин Ψ_1 и Ψ_2 .

В теории взаимодействия излучения с веществом большее распространение получил другой подход, основанный на уравнениях, описывающих непосредственно поведение элементов матрицы. Рассмотрим его подробнее.

Перепишем выражение (1.2.2) для двухуровневой системы в виде

$$\Psi^s(q, t) = a_1'(t)\varphi_1(q) + a_2'(t)\varphi_2(q), \quad (3.1.1)$$

где

$$a_1'(t) = a_1(t) \exp(-iE_1 t / \hbar), \quad (3.1.2)$$

$$a_2'(t) = a_2(t) \exp(-iE_2 t / \hbar). \quad (3.1.3)$$

Подставляя (1) в уравнение (1.2.1), получаем

$$\frac{\partial a_1'}{\partial t} \varphi_1 + \frac{\partial a_2'}{\partial t} \varphi_2 = -\frac{i}{\hbar} H(a_1' \varphi_1 + a_2' \varphi_2). \quad (3.1.4)$$

Здесь $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$. Умножим (4) на φ_1^* , и проинтегрируем по всему пространству; в результате будем иметь

$$\frac{\partial a_1'}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} (a_1' H_{11} + a_2' H_{12}), \quad (3.1.5)$$

где

$$H_{11} = \int \varphi_1^* H \varphi_1 dq, \quad H_{12} = \int \varphi_1^* H \varphi_2 dq. \quad (3.1.6)$$

Заметим, что $H_{12} = H_{21}^*$. Используя (5), можно осуществить переход к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(a_1' a_1'^*) &= \frac{\partial a_1'}{\partial t} a_1'^* + a_1' \frac{\partial a_1'^*}{\partial t} = \\ &= -\frac{i}{\hbar}(a_1' a_1'^* H_{11} + a_2' a_1'^* H_{12} - a_1'^* a_1' H_{11} - a_2'^* a_1' H_{21}) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Введем теперь величины

$$\rho'_{11} = a_1' a_1'^*, \quad \rho'_{22} = a_2' a_2'^*, \quad \rho'_{12} = a_1' a_2'^*, \quad \rho'_{21} = a_2' a_1'^*, \quad (3.1.8)$$

составляющие элементы матрицы

$$\rho' = \begin{vmatrix} \rho'_{11} & \rho'_{12} \\ \rho'_{21} & \rho'_{22} \end{vmatrix}, \quad (3.1.9)$$

называемой матрицей плотности.

С учетом (7), а также аналогичны ему уравнений, составленных для произведений $(a_2' a_2'^*)$, $(a_1' a_2'^*)$, $(a_2' a_1'^*)$, можно построить в компактной форме уравнение "движения" элементов матрицы плотности. Оно будет иметь вид

$$i\hbar \frac{\partial \rho'_{mn}}{\partial t} = [H, \rho']_{mn} = [H\rho' - \rho'H]_{mn}. \quad (3.1.10)$$

Уравнение (10) и лежит в основе формализма матрицы плотности. Входящий в (10) оператор энергии $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ также имеет матричное представление в соответствии с выражениями

$$H_0 = \begin{vmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} 0 & -\mu_{12}E \\ -\mu_{12}E & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.1.11)$$

С помощью соотношений (2.3.10), (2.3.16), (2.3.17), (2.4.5), (2.4.6), (2), (3) легко убедиться, что

$$\rho'_{11} = \rho_{11}, \quad \rho'_{22} = \rho_{22}, \quad \rho'_{12} = \rho_{12} e^{i\omega_{21}t}, \quad \rho'_{21} = \rho_{21} e^{-i\omega_{21}t}, \quad (3.1.12)$$

Отсюда видно, что матрицы ρ и ρ' являются близкими аналогами; ρ' от ρ отличается лишь наличием экспоненциальных множителей в недиагональных элементах. Их наличие приводит к тому, что выражение (2.4.4) для среднего значения дипольного момента двухуровневого атома с использованием элементов матрицы примет вид

$$\langle \mu \rangle = \mu_{12}(\rho'_{12} + \rho'_{21}). \quad (3.1.13)$$

Поскольку в дальнейшем мы будем пользоваться лишь матрицей плотности $\hat{\rho}'$, она сама, как и все ее элементы, для удобства будут обозначаться без штриха.

Уравнения движения элементов матрицы плотности (10) не учитывает влияние релаксации и по своей сути представляет собой иную форму записи уравнений (2.3.6) и (2.3.7). Для учета релаксационных процессов оно нуждается в модификации. Наиболее просто ее осуществить, добавляя к правой части уравнения (10) так называемый релаксационный член $i\hbar r_{mn}$:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} = [H, \rho]_{mn} + i\hbar r_{mn}, \quad (3.1.14)$$

где

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{1}{T_1}(\rho_{11}^0 - \rho_{11}), & r_{22} &= \frac{1}{T_1}(\rho_{22}^0 - \rho_{22}), \\ r_{12} &= \frac{1}{T_2}(\rho_{12}^0 - \rho_{12}), & r_{21} &= \frac{1}{T_2}(\rho_{21}^0 - \rho_{21}). \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Входящие в (15) постоянные времени T_1 и T_2 характеризуют скорость возвращения значений элементов матрицы плотности к их равновесным значениям ρ_{mn}^0 , которые они имеют в отсутствие электромагнитной волны. Постоянные T_1 и T_2 называются временами продольной и поперечной релаксации. Указанные термины для рассматриваемых оптических процессов являются не совсем удачными. Они пришли в оптику из теории ЯМР и ЭПР, что связано с чисто формальной аналогичностью поведения двухуровневой системы и спина в магнитном поле. Поскольку элементы ρ_{11} и ρ_{22} характеризуют заселенности уровней, а ρ_{12} и ρ_{21} – средний дипольный момент, по своему физическому смыслу связанные с ними постоянные времена T_1 и T_2 определяют скорости релаксации соответственно надтеплого возбуждения и поляризации.

3.2. Уравнения для поляризации, заселенностей и поля при наличии релаксации

Воспользуемся полученным в предыдущем параграфе уравнением (3.1.14) для построения системы самосогласованных уравнений

определяющих поведение поляризации, заселенностей и амплитуды поля при резонансном взаимодействии. Распишем с его помощью уравнения для элементов матрицы плотности в обычной форме

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = i\omega_{21}\rho_{12} + \frac{i}{\hbar}\mu_{12}E(\rho_{22} - \rho_{11}) + \frac{1}{T_2}(\rho_{12}^0 - \rho_{12}), \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -i\omega_{21}\rho_{21} - \frac{i}{\hbar}\mu_{12}E(\rho_{22} - \rho_{11}) + \frac{1}{T_2}(\rho_{21}^0 - \rho_{21}), \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}E\mu_{12}(\rho_{12} - \rho_{21}) + \frac{1}{T_1}(\rho_{22}^0 - \rho_{22}), \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}E\mu_{12}(\rho_{12} - \rho_{21}) + \frac{1}{T_1}(\rho_{11}^0 - \rho_{11}). \quad (3.2.4)$$

Умножая все члены уравнений (1) и (2) на μ_{12} ; а затем, складывая и вычитая эти уравнения, найдем

$$\frac{\partial p}{\partial t} + i\omega_{21}\xi + \frac{1}{T_2}p = 0, \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + i\omega_{21}p + \frac{\xi}{T_2} = -\frac{2i}{\hbar}\mu_{12}^2E(\rho_{22} - \rho_{11}), \quad (3.2.6)$$

где $p \equiv \langle \mu \rangle = \mu_{12}(\rho_{12} + \rho_{21})$ – средний дипольный момент, $\xi = \mu_{12}(\rho_{21} - \rho_{12})$. При получении (5) и (6) считалось, что $\rho_{12}^0 = \rho_{21}^0 = 0$. Исключив из уравнений (5) и (6) ξ , получаем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2}\frac{\partial p}{\partial t} + (\omega_{21}^2 + \frac{1}{T_2^2})p = -\frac{2\omega_{21}\mu_{12}^2}{\hbar} \cdot E(\rho_{22} - \rho_{11}). \quad (3.2.7)$$

Вычитая из (4) (3) и используя выражения для ξ из (5), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{1}{T_1}[(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0)] = -\frac{2E}{\hbar\omega_{21}}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{T_2}\right). \quad (3.2.8)$$

Умножая (7) и (8) на m , где m – число атомов в единице объема, получим уравнения

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial P}{\partial t} + \left(\omega_{21}^2 + \frac{1}{T_2^2}\right) P = \frac{2\omega_{21}\mu_{12}^2}{\hbar} E \cdot N, \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{T_1} (N - N^0) = -\frac{2E}{\hbar\omega_{21}} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{P}{T_2} \right). \quad (3.2.10)$$

Здесь $P = mp$ – поляризация, $N = N_1 - N_2 = m(\rho_{11} - \rho_{22})$ – разность заселенностей энергетических уровней, N^0 – ее равновесное значение. Анализ уравнений (9) и (10) обычно проводится совместно с волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (3.2.11)$$

получаемого для бегущей вдоль оси z волны непосредственно из уравнений Максвелла. Параметр σ в нем означает проводимость среды.

Уравнения (9), (10), (11) нуждаются в уточнении. Дело в том, что на каждую молекулу или атом в плотной среде действует поле, не совпадающее, вообще говоря, с полем, входящим в уравнения Максвелла. Различие этих полей принято учитывать с помощью поправочного коэффициента Лоренца L , равного для изотропного случая

$$L = \left(\frac{n^2 + 2}{3} \right)^2, \quad (3.2.12)$$

где $n = \sqrt{\varepsilon / \varepsilon_0}$ – показатель преломления среды без учета рассматриваемого перехода. Перепишем уравнения (9), (10), (11), учтя это обстоятельство, а также тот факт, что в оптическом диапазоне, как правило, выполняются

неравенства $\omega_{21} \gg \frac{1}{T_2}$, $\frac{\partial P}{\partial t} \gg \frac{P}{T_2}$:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial P}{\partial t} + \omega_{21}^2 P = \frac{2\omega_{21}\mu_{12}^2 L}{\hbar} NE, \quad (3.2.13)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{T_1} (N - N^0) = -\frac{2}{\hbar\omega_{21}} E \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (3.2.14)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (3.2.15)$$

Из уравнения (13) видно, что поляризация ведет себя аналогично осциллятору, возбуждаемого электрическим полем с коэффициентом связи, пропорциональным разности заселенностей. При отсутствии разности заселенностей действие электромагнитного поля не приводит к изменению поляризации. Уравнение (14) для разности заселенностей отражает баланс мощности. Первый член этого уравнения определяет мощность, передаваемую микросистеме, второй – характеризует обмен мощностью микросхемы с окружающей средой; правая часть уравнения представляет собой накачку – мощность, передаваемую системе электромагнитной волной. Уравнение (15) показывает, что обратное влияние среды на поле определяется величиной $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$.

Вышеприведенные уравнения были получены для изотропной среды. Однако их можно использовать и для анизотропной среды, если поляризацию и поле считать направленными вдоль одной из главных осей. В главе IV уравнения (13), (14), (15) будут использованы для анализа таких важных явлений, как поглощение, дисперсия и насыщение.

3.3. Другие способы учета релаксации. Оптическое уравнение Блоха

Продемонстрированный в разделе 3.1 подход к учету релаксационных процессов отнюдь не является единственным. Среди других нашедших отражение в литературе способов учета релаксации отметим тот, который основан на введении релаксационных членов в уравнения типа (3.1.5). С релаксационным членом это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial a_1'}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}(a_1' H_{11} + a_2' H_{12}) - \frac{\gamma_1 a_1'}{2}, \quad (3.3.1)$$

где параметр γ_1 имеет смысл скорости релаксации нижнего уровня. Аналогичное уравнение может быть записано для верхнего уровня, релаксационный член в котором будет зависеть, вообще говоря, от другой скорости релаксации γ_2 . Такого рода уравнения часто используются в квазиклассической теории лазеров, в частности, в получившей широкую известность теории Лэмба [6Д].

Следует отметить еще один классический подход к анализу процессов взаимодействия при наличии релаксации, основанный на использовании оптического уравнения Блоха. Построим формально вектор \bar{R} с компонентами

$$\begin{aligned}
 R_1 &= a'_1 a_2'^* + a_1' a_2', \\
 R_2 &= i(a'_1 a_2'^* - a_1' a_2'), \\
 R_3 &= a'_1 a_1'^* - a_2' a_2'^*.
 \end{aligned}
 \tag{3.3.2}$$

и вектор \bar{A} с компонентами

$$\begin{aligned}
 A_1 &= (H_{12} + H_{21})/\hbar, \\
 A_2 &= i(H_{12} - H_{21})/\hbar, \\
 A_3 &= (E_1 - E_2)/\hbar = -\omega_{21}.
 \end{aligned}
 \tag{3.3.3}$$

Используя уравнение (3.1.5), а также аналогичное ему уравнение для коэффициента a_2' , несложно убедиться в справедливости соотношения

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = [\bar{A} \times \bar{R}],
 \tag{3.3.4}$$

известного, как уравнение Блоха. Модификация уравнения (4) с целью учета релаксации состоит в приведении его к виду

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{A} \times \bar{R} - \bar{R}_\perp T_2 - \bar{z}_1 (R_z - R^{(0)})/T_1.
 \tag{3.3.5}$$

Уравнение (5) называется оптическим уравнением Блоха. Его поясняет рис. 3.1. \bar{z}_1 – это единичный вектор, направленный, как и компонента R_z , вдоль оси z , \bar{R}_\perp – перпендикулярная направлению оси z компонента вектора \bar{R} . $R^{(0)}$ – равновесное значение компоненты R_z . T_1 и T_2 – как и ранее обозначают времена продольной и

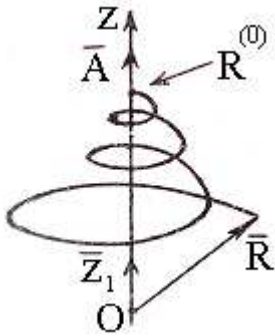


Рис.3.1. Иллюстрация к оптическому уравнению Блоха.

поперечной релаксации. Вектор \bar{R} прецессирует вокруг вектора \bar{A} . При выключении поля прецессия будет затухать, и величина вектора \bar{R} будет стремиться к равновесному значению $R^{(0)}$. Из уравнения (5) и поясняющего его рисунка видно, что термины "продольная" и "поперечная" релаксации в данной теоретической модели довольно наглядно иллюстрируют влияние релаксационных процессов. Оптическое уравнение Блоха, позволяющее применять для описания оптических явлений математический формализм, схожий с тем, который используется во многих разделах спектроскопии, достаточно широко используется в физической оптике и квантовой электронике.