

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА  
Научно-исследовательский институт ядерной физики  
имени Д.В. Скобельцына

---

П.В. Короленко, М.С. Маганова

ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ  
В ОПТИКЕ

Москва  
2010

УДК 535  
ББК 22.34я73-1  
К68

**Короленко П. В., Маганова М. С.**

К68 Основы статистических методов в оптике : Учебное пособие / П. В. Короленко, М. С. Маганова — М. : Университетская книга, 2010. — 164 с. : табл., ил.  
ISBN 978-5-91304-126-5

Кратко изложены вероятностно-статистические методы, наиболее часто используемые в оптике при анализе стохастических процессов. Наряду с изложением общетеоретических вопросов, приводятся конкретные примеры применения статистического подхода при изучении и моделировании оптических явлений, а также при обработке данных наблюдений.

Для студентов и аспирантов, специализирующихся в области физической и статистической оптики.

УДК 535  
ББК 22.34я73-1

Учебное издание

**Павел Васильевич Короленко**  
**Мария Сергеевна Маганова**  
**ОСНОВЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ**  
**В ОПТИКЕ**

Учебное пособие

Работа поступила в ОНТИ 02.04.2010

Подп. в печать 20.05.2010. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.  
Печать цифровая. Тираж 150 экз. Заказ № Т-096.

Отпечатано с диапозитивов, предоставленных автором, в типографии «КДУ».  
Тел./факс (495) 939-44-91; www.kdu.ru; e-mail: press@kdu.ru

ISBN 978-5-91304-126-5

© МГУ, 2010.  
© НИИЯФ МГУ, 2010.  
© П. В. Короленко,  
М. С. Маганова, 2010.  
© Издательство КДУ,  
обложка, 2010.

## Оглавление

<b>ОГЛАВЛЕНИЕ .....</b>	<b>3</b>
<b>ПРЕДИСЛОВИЕ.....</b>	<b>6</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>9</b>
<b>ГЛАВА I. СЛУЧАЙНЫЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.....</b>	<b>11</b>
1.1. Функция и плотность распределения вероятностей .....	11
1.2. Средние значения и моменты случайных величин, параметры распределений .....	14
1.3. Нормальное (гауссовское) распределение вероятностей и связанные с ним распределения ...	19
1.4. Биномиальное распределение и распределение Пуассона .....	26
1.5. Другие плотности распределения вероятностей .....	28
1.6. Оценка отклонения анализируемого распределения от нормального. Асимметрия и эксцесс .....	35
1.7. Характеристическая функция.....	38
1.8. Центральная предельная теорема.....	39
1.9. Совместные распределения случайных величин. Условные функции распределения и плотность распределения вероятностей .....	40
1.10. Плотность распределения вероятностей суммы (разности) двух случайных величин .....	43
1.11. Корреляционный момент, коэффициент корреляции .....	45
<b>ГЛАВА II. СЛУЧАЙНЫЕ КОМПЛЕКСНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.....</b>	<b>47</b>
2.1. Описание случайной комплексной переменной.....	47
2.2. Общая характеристика суммы случайных фазоров .....	49

---

2.2.1. Исходные предположения .....	49
2.2.2. Распределение длины и фазы результатирующего фазора .....	53
2.3. Некоторые частные случаи суммирования случайных фазоров .....	55
2.3.1. Постоянный фазор и сумма случайных фазоров .....	55
2.3.2. Большой постоянный фазор и малая сумма случайных фазоров .....	60
<b>ГЛАВА III. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.....</b>	<b>63</b>
3.1. Выборки .....	63
3.2. Выборочная дисперсия .....	66
3.3. Доверительный интервал.....	68
3.4. Аппроксимация экспериментальных данных и линейная регрессия .....	70
3.5. Проверка статистических гипотез .....	73
<b>ГЛАВА IV. АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....</b>	<b>78</b>
4.1. Общие характеристики случайных процессов. Стационарные и эргодические процессы .....	78
4.2. Измерение параметров случайных процессов .....	84
4.3. Корреляционная и структурная функции .....	88
4.4. Свойства автокорреляционных функций.....	93
4.5. Измерение автокорреляционных функций.....	97
4.6. Взаимные корреляционные функции .....	99
4.7. Энергетический спектр стационарного случайного процесса .....	102
4.8. Марковский и винеровский процессы .....	106
4.9. Белый шум .....	109
4.10. Преобразование случайных сигналов временными фильтрами.....	110

---

<b>ДОПОЛНЕНИЕ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА MATHCAD В СТАТИСТИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ .....</b>	<b>114</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ.....</b>	<b>127</b>
Приложение 1. Прохождение излучения через случайно неоднородные среды .....	127
Приложение 2. Статистическая модель оптических шумов .....	128
Приложение 3. Теория фотоотсчетов .....	132
Приложение 4. Применение центральной предельной теоремы в оптике .....	135
Приложение 5. Спекл-эффекты при когерентном формировании изображения .....	142
Приложение 6. Применение методов математической статистики в обработке наблюдений .....	145
Приложение 7. Обнаружение периодического сигнала .....	149
Приложение 8. Теория когерентности.....	151
Приложение 9. Сравнение характеристик временных и пространственных фильтров .....	153
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>157</b>
<b>ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ .....</b>	<b>160</b>

## Предисловие

В настоящее время уровень подготовки исследователей в области физической оптики во многом определяется степенью освоения ими вероятностно-статистических методов анализа. Без владения этими методами невозможно изучение важных разделов оптики, таких, в частности, как теория когерентности и фотоотсчетов, оптика случайно-неоднородных сред, спеклинтерферометрия, обработка информации, оптические измерения.

Известно, что учебные программы по математике физических факультетов классических университетов включают курс теории вероятностей с элементами математической статистики. Однако практика работы со студентами на старших курсах в процессе освоения ими материалов спецкурсов, выполнения спецпрактикумов, подготовки курсовых и дипломных работ показывает, что полученные знания оказываются либо недостаточными, либо слабо закрепленными. Несмотря на большое число учебных пособий по теории вероятностей и математической статистике, студентам часто бывает сложно с их помощью восполнить и дополнить знания. Это связано с дефицитом времени в процессе интенсивной специализации и с недостаточной адаптацией большинства существующих руководств к задачам современной физической оптики. Кроме того, многие известные пособия весьма слабо освещают, а иногда и полностью обходят вопросы, относящиеся к реализации рассматриваемых методов на основе современных компьютерных технологий.

Аппарат теории вероятностей и математической статистики обычно используется для анализа случайных процессов, течение которых обусловлено боль-

---

шим числом трудно учитываемых или неконтролируемых факторов. Это не позволяет определить точные значения параметров развивающегося процесса. Существует возможность оценить лишь вероятности принятия параметрами определенных значений. В последнее время вероятностно-статистические методы стали широко использоваться для описания развития в системах детерминированного хаоса. Он связан с высокой чувствительностью динамики системы к заданию начальных условий. Несмотря на различие физической природы случайных и хаотических процессов, их изучение возможно на основе общих статистических подходов. Во избежание лишних оговорок в ходе изложения материала, мы в дальнейшем будем относить такие процессы к обобщающему классу стохастических процессов.

Статистические методы анализа обладают особенностью, которую необходимо учитывать при их практической реализации. Они требуют, как правило, больших объемов вычислений. Однако сейчас, когда уровень развития вычислительной техники и программного обеспечения очень высок, это не может служить сколь-нибудь серьезным препятствием. Почти любой современный персональный компьютер позволяет решать большое число статистических задач с использованием возможностей, заложенных в легкодоступных программных пакетах, таких, например, как MathCAD или MathLAB. Это обстоятельство подтолкнуло авторов привести некоторые сведения и иллюстрации, относящиеся к компьютерным вычислениям, а также на примерах показать некоторые возможности, которые предоставляет вычислительная среда MathCAD.

У читателя существует возможность расширить и дополнить содержащийся в пособии материал, вос-

пользовавшись приведенным в хронологическом порядке перечнем монографий, научных справочников, учебников и учебных пособий по статистическому анализу. В него вошли преимущественно литературные источники, материал которых в той или иной степени использовался при написании пособия. Авторы старались не перегружать разделы, посвященные общим вопросам, разнообразными иллюстрациями и примерами, и вынесли их в приложения. Конечно, рассмотренные там примеры из-за ограниченности объема книги не могут дать полного представления о реализации статистических методов в оптических исследованиях. Авторы рассчитывают, что указанный недостаток читатели восполнят самостоятельной работой с литературными источниками.

---

## Введение

Важную роль в теории вероятностей и математической статистике играет понятие случайной величины. Его можно связать со случайной функцией времени, описывающей структуру стохастических сигналов, регистрируемых в процессе наблюдения за разнообразными физическими процессами. Значащие точки таких сигналов представляют собой набор случайных величин.

Предположим, что в результате некоторого опыта реализована случайная функция времени  $x(t)$ , пример которой приведен на *рис. В.1*. Естественно, в практических случаях такая реализация является лишь одной из бесконечного множества потенциально существующих. Совокупность всех этих реализаций формирует случайный процесс, обозначаемый в дальнейшем как  $X(t) = \{x(t)\}$ . Если для него определены вероятностные характеристики, то эту совокупность называют *ансамблем*. Любой член ансамбля (например,  $x(t)$ ) представляет собой *выборочную функцию*, и ее значение в некоторый определенный момент времени, например,  $t_1$ , является случайной величиной, обозначаемой  $X(t_1)$  или просто  $X_1$ . Таким образом,  $X_1 = x(t_1)$ , если  $x(t)$  – отдельная наблюдаемая выборочная функция (реализация) случайного процесса  $X(t)$ .

Следует отметить, что, во-первых, в каждый момент времени фигурирует своя случайная величина, во-вторых, случайный характер, о котором здесь говорится, наблюдается по всему ансамблю при переходе от одной выборочной функции к другой. Аналогичный характер может наблюдаться и при переходе от одного

момента времени к другому. В связи с этим вероятностное описание случайных величин одновременно может служить вероятностным описанием случайного процесса или некоего сигнала, характеризующего происходящие в изучаемой системе изменения. Тем не менее, в ходе изложения материала мы сначала рассмотрим свойства случайных величин, а затем перейдем к анализу случайных процессов.

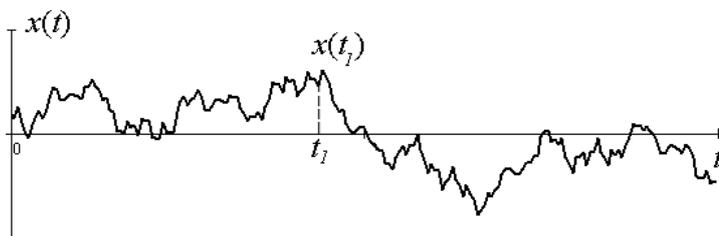


Рис. В.1. Реализация случайной функции времени.

## Глава I. Случайные действительные величины

### 1.1. Функция и плотность распределения вероятностей

*Случайной* называется величина, наблюдаемые значения которой зависят от случайных причин. Эти значения могут представлять собой либо непрерывный континуум, либо набор дискретных значений.

Целесообразно отличать случайные величины, принимающие лишь отдельные, изолированные значения, от тех, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый промежуток.

*Дискретной* называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным. Если подобная величина может принимать лишь целые неотрицательные значения, она называется *целочисленной*.

*Законом распределения (рядом распределения)* дискретной случайной величины называется совокупность всех ее возможных значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и вероятностей  $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$  появления каждого из них. Пример графического представления закона распределения дискретной случайной величины приведен на рис. 1.1.1, а.

Случайная величина называется *непрерывной*, если она может принимать любые значения из некоторого ограниченного или неограниченного интервала. Такая величина имеет несчетное множество возможных значений, которые сплошь заполняют некоторый интервал числовой оси или всю числовую ось.

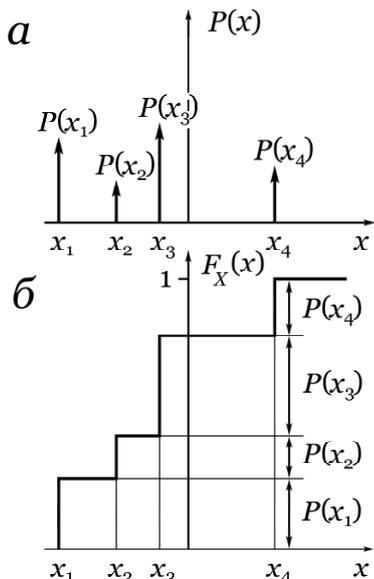


Рис. 1.1.1. Примеры закона (а) и функции (б) распределения вероятностей дискретной случайной величины.

как вероятность  $P$  события, заключающегося в том, что наблюдаемая случайная величина меньше или равна допустимому ее значению  $x$ , т.е.

$$F_X(x) = P(X \leq x).^* \quad (1.1.1)$$

Функция распределения вероятностей  $F_X(x)$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $0 \leq F_X(x) \leq 1, \quad -\infty < x < \infty,$
- 2)  $F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(\infty) = 1,$

\* В пособии принята тройная нумерация формул: глава, параграф, формула. При ссылках внутри параграфа указывается только номер формулы.

Случайная величина характеризуется полностью, если указаны вероятности, с которыми она может принимать те или иные значения. Эти вероятности можно описать с помощью функций их распределения.

Если  $X$  – случайная величина, а  $x$  – любое ее значение, то функция распределения вероятностей (часто ее называют просто *функцией распределения*) определяется

- 3)  $F_X(x)$  не уменьшается при возрастании  $x$ ,  
 4)  $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$ .

Примеры функции распределения вероятностей дискретной и непрерывной величин приведены, соответственно, на *рис. 1.1.1, б* и *рис. 1.1.2, а*.

Наряду с функцией распределения вероятностей непрерывную случайную величину принято характеризовать также *функцией плотности распределения вероятностей (плотностью вероятностей)*. Эта функция, дифференциал которой равен

$$f_X(x)dx = P(x < X \leq x + dx). \quad (1.1.2)$$

Соотношение (2) означает, что дифференциал  $f_X(x)dx$  представляет вероятность того, что случайная величина  $X$  лежит в диапазоне значений между  $x$  и  $x + dx$ .

Плотность распределения вероятностей  $f_X(x)$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $f_X(x) \geq 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,
- 2)  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ ,
- 3)  $\int_{-\infty}^x f_X(u)du = F_X(x)$ ,
- 4)  $\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx = P(x_1 < X \leq x_2)$ .

На *рис. 1.1.2, б* показано поведение плотности распределения для непрерывной величины.

На практике оценка плотности вероятности осуществляется путем построения *гистограммы*. Гистограмма – ступенчатая фигура, показывающая долю

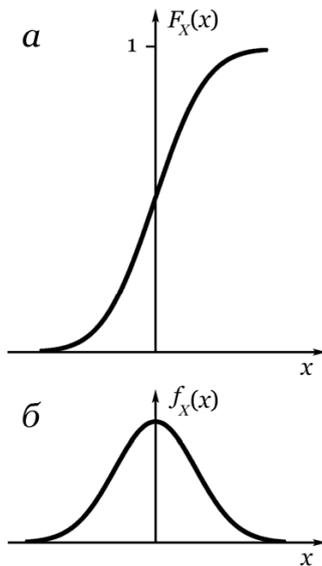


Рис. 1.1.2. Примеры функции распределения (а) и плотности распределения (б) вероятностей непрерывной случайной величины.

состояний процесса  $p(n)$ , когда характеризующая его случайная величина принимает значения в интервале от  $(n-1/2)\delta$  до  $(n+1/2)\delta$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), где параметр  $\delta$  определяет задаваемую величину интервала. При построении гистограммы по оси ординат откладывается величина  $p(n)$ , а по оси абсцисс — значение  $n$ . Выборочной оценкой плотности вероятности является функция

$$f_X(n\delta) = p(n)/\delta. \quad (1.1.4)$$

## 1.2. Средние значения и моменты случайных величин, параметры распределений

Важной характеристикой случайной величины является ее *среднее значение*  $\bar{X}$ , определяемое следующим образом\*:

$$\bar{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \quad (1.2.1)$$

\* Мы будем опускать индекс при функции  $f(x)$ , если ясно, к какой случайной величине она относится.

Величина  $E[X]$  называется *математическим ожиданием*  $X$ . Помимо символа  $E[X]$  для статистического усреднения мы будем в дальнейшем, исходя из удобства записи формул, также использовать обозначение  $\langle X \rangle$ .

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания,  $E[cX] = c \cdot E[X]$ .

2. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий,  $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$ .

3. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий,  $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$ .

С помощью выражения (1) может быть найдено математическое ожидание любой функции от  $x$ :

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx. \quad (1.2.2)$$

Особое значение при проведении статистического анализа имеют функции вида  $g(x) = x^n$ . Они входят в общее выражение для так называемых *начальных моментов* случайной величины:

$$\overline{X^n} = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx. \quad (1.2.3)$$

Самыми важными из моментов  $E[X^n]$  случайной величины  $X$  являются *начальный момент 1-го порядка* (при  $n = 1$ ), равный математическому ожиданию (1), и *момент 2-го порядка* (при  $n = 2$ ), посредст-

вом которого находится *средний квадрат* случайной величины,

$$\overline{X^2} = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx. \quad (1.2.4)$$

Важное значение имеют *центральные моменты*, представляющие собой моменты разности случайной величины  $X$  и ее математического ожидания  $\bar{X}$ . Так, центральный момент  $n$ -го порядка  $\mu_n$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_n &= \overline{(X - \bar{X})^n} = \\ &= E[(X - \bar{X})^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^n f(x) dx. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Первый центральный момент (для  $n = 1$ ) равен, естественно, нулю, а второй центральный момент (для  $n = 2$ ) настолько важен, что получил даже собственное название — *дисперсии*. В литературе для нее используются обозначения  $\sigma_X^2$ ,  $D[X]$  или  $\text{Var}[X]$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \sigma_X^2 = D[X] = \text{Var}[X] = \overline{(X - \bar{X})^2} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{X})^2 f(x) dx. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Дисперсию можно определить и по-другому, если воспользоваться правилом для нахождения математического ожидания суммы случайных величин:

$$E[X_1 + X_2 + \dots + X_m] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_m].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^2 &= E[(X - \bar{X})^2] = E[X^2 - 2X\bar{X} + (\bar{X})^2] = \\
 &= E[X^2] - 2E[X]\bar{X} + (\bar{X})^2 = \\
 &= \overline{X^2} - 2\bar{X} \cdot \bar{X} + (\bar{X})^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2.
 \end{aligned}
 \tag{1.2.7}$$

То есть, дисперсия равна разности между средним квадратом случайной величины и квадратом ее математического ожидания. Ее физический смысл состоит в том, что она определяет среднюю интенсивность флуктуаций.

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:  $D[cX] = c^2 D[X]$ .

2. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:  $D[X + Y] = D[X] + D[Y]$ .

3. Дисперсия случайной величины не изменится, если к ней прибавить постоянную:  $D[X + c] = D[X]$ .

4. Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то  $D[X \cdot Y] = E[X^2] \cdot E[Y^2] - (E[X])^2 \cdot (E[Y])^2$ .

Величина  $\sigma_x$  — значение квадратного корня из дисперсии — называется *стандартным* или *средним квадратическим отклонением*.

При весьма общих условиях набор моментов полностью определяет распределение вероятностей. Встречается немало случаев, когда проще найти полный набор моментов неизвестного распределения, чем непосредственно само распределение. В таких случаях распределение удастся построить исходя из набора данных моментов.

Моменты являются общими (интегральными) характеристиками. Наряду с ними используются параметры, которые характеризуют отдельные значения

функции распределения. К ним в первую очередь относятся такие понятия как медиана, мода и размах.

*Медианой*  $Me[X]$  случайной величины  $X$  называется такое ее значение  $x_p$ , для которого  $P\{X < x_p\} = P\{X > x_p\} = 1/2$ , т.е. вероятности того, что величина  $X$  будет меньше  $x_p$  или больше  $x_p$ , одинаковы.

*Модой*  $Mo[X]$  дискретной случайной величины  $X$  называется ее значение, принимаемое с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями. Для непрерывной случайной величины  $Mo[X]$  определяется точкой максимума (локального) плотности вероятностей  $f_X(x)$ . Если мода единственна, то распределение случайной величины называется *унимодальным*, в противном случае – *полимодальным*.

*Размахом*  $Ra[X]$  случайной величины называется разность между максимальным и минимальным ее значениями,  $Ra[X] = x_{\max} - x_{\min}$ .

Помимо рассмотренных выше числовых характеристик случайной величины нашли применение так называемые квантили.

*Квантилем*  $x_p$  распределения случайной величины  $X$  с функцией распределения вероятностей  $F_X(x)$  называется решение уравнения

$$F_X(x_p) = P. \quad (1.2.8)$$

Иными словами квантиль  $x_p$  есть такое значение случайной величины  $X$ , что  $P(X < x_p) = P$ . Вероятность  $P$ , задаваемая в процентах, дает название соответствующему квантилю; например,  $x_{0,2}$

называется 20%-ым квантилем. 50%-й квантиль представляет собой медиану случайной величины.

### 1.3. Нормальное (гауссовское) распределение вероятностей и связанные с ним распределения

Среди различных возможных распределений вероятностей особое место занимает *нормальное распределение (распределение Гаусса)*. Оно служит хорошей математической моделью для целого ряда наблюдаемых явлений и в статистическом смысле может быть полностью описано при помощи только первого и второго моментов. Важно отметить, что любые линейные комбинации гауссовских случайных величин также являются гауссовскими.

*Нормальная (гауссовская) плотность распределения вероятностей* имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \bar{X})^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.3.1)$$

при  $-\infty < x < +\infty$ .

где  $\bar{X}$  – математическое ожидание,  $\sigma^2$  – дисперсия. Графики плотности и функция распределения вероятностей гауссовской случайной величины показаны на рис. 1.3.1, а и б, соответственно. Из них видно, что плотность распределения вероятностей гауссовской случайной величины имеет только один симметрично расположенный максимум, который соответствует математическому ожиданию. Ширина нормальной плотности вероятностей прямо пропорциональна среднему квадратическому (стандартному) отклонению  $\sigma$ . На уровне 0,607 от максимального значения функции  $f_X(x)$  она равна  $2\sigma_X$ . Максимум нормальной плотно-

сти распределения вероятностей обратно пропорционален стандартному отклонению  $\sigma$ .

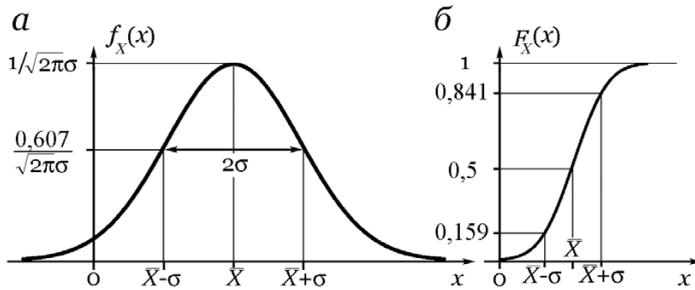


Рис. 1.3.1. Плотность вероятностей (а) и функция распределения (б) гауссовской случайной величины.

Соответствующая функция распределения вероятностей не сводится к простой математической формуле. Впрочем, ее можно описать посредством широко известных табулированных функций, учитывая связь между функцией распределения и плотностью распределения вероятностей гауссовской случайной величины:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^x f(u) du = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(u-\bar{X})^2}{2\sigma^2}\right) du.
 \end{aligned}
 \tag{1.3.3}$$

Обычно табулируют функцию нормированного гауссовского распределения вероятностей, характеризуемого математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице (т.е.  $\bar{X} = 0$ ,  $\sigma = 1$ ). Ее обозначают через  $\Phi(x)$  и определяют следующим образом:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2) du. \quad (1.3.4)$$

Часто используется функция  $Q(x)$ , связанная с функцией  $\Phi(x)$ , соотношением

$$Q(x) = 1 - \Phi(x). \quad (1.3.5)$$

В литературе можно встретить различные обозначения для функции  $\Phi(x)$  и  $Q(x)$ . Некоторые авторы используют запись

$$\operatorname{erf}(x) = \Phi(x), \quad (1.3.6)$$

где  $\operatorname{erf}(x)$  – функция ошибок, и

$$\operatorname{erfc}(x) = Q(x),$$

где  $\operatorname{erfc}(x)$  – обратная функция ошибок.

Однако другие авторы определяют функцию ошибок как

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du. \quad (1.3.7)$$

Указанные различия следует учитывать при использовании приводимых в литературе соотношений.

Дополнительную графическую иллюстрацию к зависимостям, представленным на *рис. 1.3.1*, дает рисунок *1.3.2*.

Особая важность гауссовского распределения случайной величины помимо тех причин, о которых было сказано выше, обусловлена еще и тем, что непосредственно с ним связан ряд часто встречающихся на практике распределений. Среди них отметим логарифми-

чески нормальное распределение и распределение Рэлея.

Для характеристики *логарифмически нормального распределения* рассмотрим две случайные величины  $X$  и  $Y$ , удовлетворяющие соотношению  $Y = \ln X$  (или, что эквивалентно,  $X = \exp(Y)$ ), и предположим,

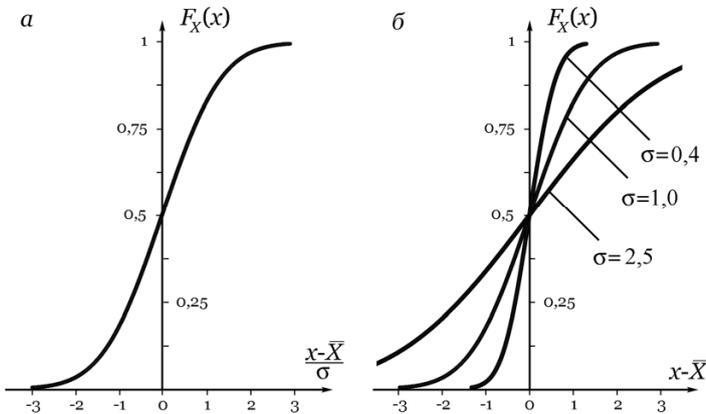


Рис. 1.3.2. Другие графические представления функции нормального распределения вероятностей. По оси абсцисс отложена величина  $\frac{x - \bar{X}}{\sigma}$  (а) и величина  $x - \bar{X}$  (б).

что  $Y$  представляет собой гауссовскую случайную величину с математическим ожиданием  $\bar{Y}$  и дисперсией  $\sigma_Y^2$ . Несложно показать, что плотность распределения вероятностей  $X$  имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y x} \right) \exp \left[ -\frac{(\ln x - \bar{Y})^2}{2\sigma_Y^2} \right], & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (1.3.8)$$

Это и есть логарифмически нормальная плотность распределения вероятностей. На *рис. 1.3.3* показан общий вид графиков для различных значений  $\sigma$ .

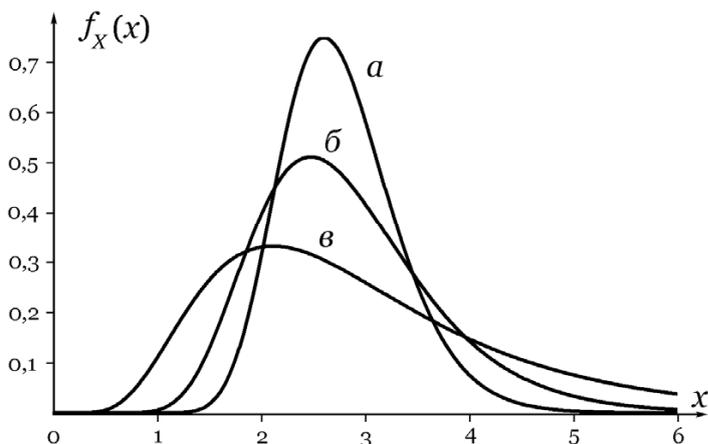


Рис. 1.3.3. Логарифмически нормальное распределение  $\bar{Y} = 1$ ,  
а)  $\sigma = 0,2$ , б)  $0,3$ , в)  $0,5$ .

На практике чаще бывает удобнее вместо выражения (8) использовать другое представление:

$$f_X(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho x}} \right) \exp \left[ -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\rho^2} \right], \quad (1.3.9)$$

где  $\mu = \ln \frac{\langle \bar{X} \rangle}{\sqrt{1 + \sigma_X^2}}$ ,  $\rho = \sqrt{\ln(1 + \sigma_X^2)}$ .

Математическое ожидание и дисперсия находятся, как обычно, и имеют вид

$$\bar{X} = \exp(\bar{Y} + \sigma_Y^2/2), \quad (1.3.10)$$

$$\sigma_X^2 = [\exp(\sigma_Y^2) - 1] \exp\left(2\left(\bar{Y} + \frac{\sigma_Y^2}{2}\right)\right). \quad (1.3.11)$$

Логарифмическая нормальная функция распределения вероятностей не может быть записана через элементарные функции. Если необходимо выполнить расчеты с применением этого распределения, обычно приходится прибегать к численному интегрированию.

К нормальному и логарифмически нормальному распределению вероятностей часто приходится обращаться при анализе флуктуационной структуре световых пучков (см. приложение I).

*Распределение Рэлея* играет важную роль при анализе амплитудных значений случайных световых колебаний. Оно также встречается при наведении лазерных пучков на мишень, если разбросы (отклонения от мишени) в каждом из двух взаимно перпендикулярных направлений независимы и распределены по нормальному закону. Таким образом, если начало прямоугольной системы координат считать целью, а разброс по осям обозначить через  $X$  и  $Y$ , то промах будет выглядеть как  $R = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ . Если  $X$  и  $Y$  – независимые гауссовские случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями  $\sigma^2$ , то плотность вероятностей для  $R$  запишется в виде

$$f_R(r) = \begin{cases} (r/\sigma^2) \exp(-r^2/2\sigma^2) & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases} \quad (1.3.12)$$

Это и есть рэлеевская плотность распределения вероятностей, ее графики для различных значений дисперсии  $\sigma^2$  показаны на *рис. 1.3.4*. Обратите внимание на то, что максимум этой функции соответствует

стандартному отклонению, и что она несимметрична относительно этого значения.

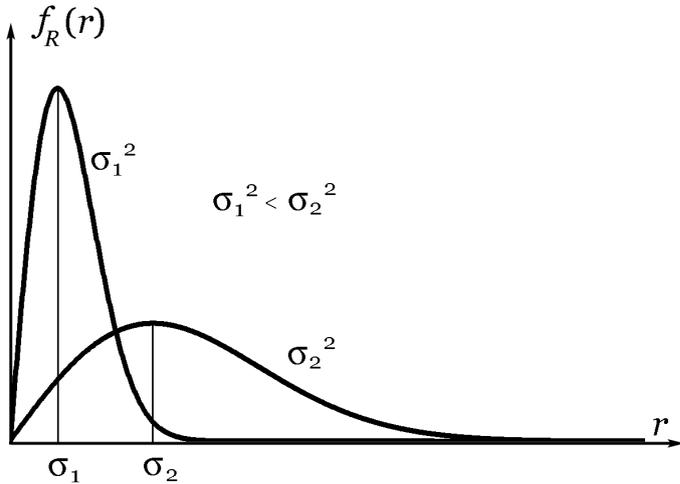


Рис. 1.3.4. Рэлеевская плотность распределения вероятностей.

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Рэля, легко определяется и равно

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \int_0^{\infty} r f_R(r) dr = \int_0^{\infty} (r^2/\sigma^2) \exp(-r^2/2\sigma^2) dr = \\ &= (\pi/2)^{1/2} \sigma, \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

а средний квадрат имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{R^2} &= \int_0^{\infty} r^2 f_R(r) dr = \int_0^{\infty} (r^3/\sigma^2) \exp(-r^2/2\sigma^2) dr = \\ &= 2\sigma^2. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

При этом дисперсия случайной величины  $R$  равна

$$\sigma_R^2 = \overline{R^2} - (\overline{R})^2 = (2 - \pi/2)\sigma^2 = 0,429\sigma^2. \quad (1.3.15)$$

Полученное значение (15) отличается от дисперсии  $\sigma^2$  гауссовых случайных величин, из которых получена рассматриваемая величина. В отличие от гауссовских, для случайной величины, определенной по закону Рэлея, и математическое ожидание, и дисперсия зависят от одного и того же параметра  $\sigma^2$ , в результате чего они не могут изменяться независимо друг от друга.

Функция распределения вероятностей для рэлеевской величины находится непосредственно из соответствующей плотности вероятностей, которая легко интегрируется. Таким образом,

$$F_R(r) = \begin{cases} \int_0^r (u/\sigma^2) \exp(-u^2/2\sigma^2) du, & r \geq 0, \\ 0, & r < 0, \end{cases} \quad (1.3.16)$$

$$= \begin{cases} 1 - \exp(-r^2/2\sigma^2), & r \geq 0, \\ 0 & r < 0. \end{cases}$$

#### 1.4. Биномиальное распределение и распределение Пуассона

Важную роль при анализе оптических явлений играют *биномиальное* и *пуассоновское распределения дискретных целочисленных случайных величин*. Для их характеристики рассмотрим  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых некое событие  $A$  может либо появиться, либо не появиться. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна, и равна  $p$  (соответственно, вероятность не появления  $q = 1 - p$ ). Рассмотрим в качестве случайной величины

$X$  число появления события  $A$  в этих испытаниях. Чтобы найти закон распределения величины  $X$ , определим возможные значения  $X$  и их вероятности. Очевидно, событие  $A$  в  $n$  реализациях может либо не появиться, либо появиться 1 раз, либо 2 раза, ... либо  $n$  раз. Таким образом, величине  $X$  ставятся в соответствие следующие значения:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 2$ , ...,  $x_{n+1} = n$ . Вероятности этих возможных значений можно найти, воспользовавшись *формулой Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (1.4.1)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , а коэффициент  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  обозначает число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ .

Формула (1) и задает *биномиальный закон распределения*. При таком распределении математическое ожидание  $\bar{X} = np$ , дисперсия  $D[X] = npq$ .

Будем считать, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события  $A$  очень мала, событие наступит ровно  $k$  раз, при этом произведение  $np$  сохраняет постоянное значение, а именно  $np = \lambda$ . Это означает, что среднее число появления события в различных сериях испытаний, то есть при различных значениях  $n$ , остается неизменным. При таких допущениях закон распределения будет иметь вид

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!. \quad (1.4.2)$$

Формула (2) будет характеризовать *закон распределения Пуассона*, справедливый для массовых

( $n$  велико) и редких ( $p$  мало) событий. В такой ситуации  $\bar{X} = D[X] = \lambda$ .

Пример использования биномиального и пуассоновского распределения в оптике приведены в приложениях 2 и 3.

### 1.5. Другие плотности распределения вероятностей

Кроме отмеченных выше распределений вероятностей случайных величин, в ходе решения задач нередко приходится встречаться и с другими. Среди них следует выделить *равномерное распределение*. На практике оно встречается, если среди принимаемых случайными величинами значений нет каких-либо предпочтительных.

Если значения случайной величины  $X$  изменяются в области  $x_1 < x \leq x_2$ , то плотность равномерного распределения вероятностей имеет вид

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(x_2 - x_1), & x_1 < x \leq x_2, \\ 0, & x \leq x_1, x > x_2. \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Не сложно показать, что

$$\bar{X} = (x_1 + x_2)/2, \quad (1.5.2)$$

$$\sigma_X^2 = (x_2 - x_1)^2/12. \quad (1.5.3)$$

Функция распределения вероятностей рассматриваемой случайной величины, получаемая путем интегрирования плотности вероятностей, определяется формулой

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1, \\ (x - x_1)/(x_2 - x_1), & x_1 < x \leq x_2, \\ 1, & x > x_2. \end{cases} \quad (1.5.4)$$

Плотность равномерного распределения вероятностей часто используется при рассмотрении гармонических сигналов со случайной фазой. Например, если подобный сигнал в виде лазерного пучка передается из одного места в другое, его фаза в точке приема может считаться случайной. Поскольку отсутствует физическая причина, в соответствие с которой следовало бы одно из значений фазы предпочесть другим, обычно полагают, что фаза распределена равномерно в пределах  $2\pi$ . Если сигнал с частотой  $\omega$ , является функцией времени  $t$ ,  $x(t) = \cos(\omega t - \theta)$ , то в этом случае фаза  $\theta$ , являясь случайной величиной, будет характеризоваться плотностью вероятностей

$$f_{\theta}(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi, & 0 < \theta \leq 2\pi, \\ 0, & \theta \leq 0, \theta > 2\pi. \end{cases} \quad (1.5.5)$$

При этом математическое ожидание  $\theta$  будет равно  $\bar{\theta} = \pi$ , а дисперсия примет значение  $\sigma_{\theta}^2 = \pi^2/3$ .

При анализе оптических процессов часто встречается *экспоненциальное распределение*. Как было отмечено при рассмотрении равномерного распределения, события с произвольными моментами наступления часто считаются равновероятными. Таким образом, если средний промежуток времени между наступлением событий обозначать через  $\bar{\tau}$ , то вероятность наступления события на интервале  $\Delta t$ , меньшем  $\bar{\tau}$ , будет равняться просто  $\Delta t/\bar{\tau}$ , независимо от того, как расположен рассматриваемый интервал. Исходя из такого предположения, найдем функцию распределения вероятностей временного интервала между событиями.

Рассмотрим *рис. 1.5.1*. Пусть некое событие произошло в момент  $t_0$  и необходимо определить вероят-

ность того, что следующее событие произойдет в произвольный момент времени, расположенный между  $t_0 + \tau$  и  $t_0 + \tau + \Delta t$  (события отмечены звездочками). Обозначая функцию распределения

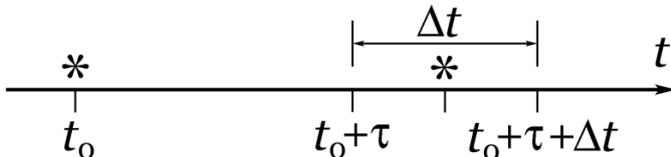


Рис. 1.5.1. Временной интервал между событиями.

вероятностей случайной величины  $\tau$  через  $F(\tau)$ , запишем величину искомой вероятности просто как  $F(\tau + \Delta t) - F(\tau)$ . Но вероятность того, что событие произойдет в интервале  $\Delta t$ , должна одновременно равняться произведению вероятностей двух независимых событий: «событие не произошло в промежутке от  $t_0$  до  $t_0 + \tau$ » и «событие произошло в промежутке от  $t_0 + \tau$  до  $t_0 + \tau + \Delta t$ ». Поскольку  $1 - F(\tau)$  — это вероятность того, что событие не произойдет в интервале между  $t_0$  и  $t_0 + \tau$ , а  $\Delta t / \bar{\tau}$  — вероятность того, что оно произойдет на промежутке  $\Delta t$ , можно записать

$$F(\tau + \Delta t) - F(\tau) = [1 - F(\tau)](\Delta t / \bar{\tau}). \quad (1.5.6)$$

Поделив левую и правую части полученного выражения на  $\Delta t$  и устремив  $\Delta t$  к нулю, получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[F(\tau + \Delta t) - F(\tau)]}{\Delta t} = \frac{dF(\tau)}{d\tau} = \frac{1 - F(\tau)}{\bar{\tau}}. \quad (1.5.7)$$

Решая полученное дифференциальное уравнение, найдем искомое распределение вероятностей

$$F(\tau) = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\bar{\tau}}\right), \quad \tau \geq 0. \quad (1.5.8)$$

(Постоянная интегрирования находится с учетом начального условия  $F(0) = 0$ , поскольку  $\tau$  не может быть меньше нуля.)

Дифференцируя (8), получим выражение для плотности распределения вероятностей временного интервала между событиями. Таким образом,

$$f(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\tau}} \exp\left(-\frac{\tau}{\bar{\tau}}\right) & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad (1.5.9)$$

Эта функция называется плотностью экспоненциального распределения вероятностей, и на *рис. 1.5.2*

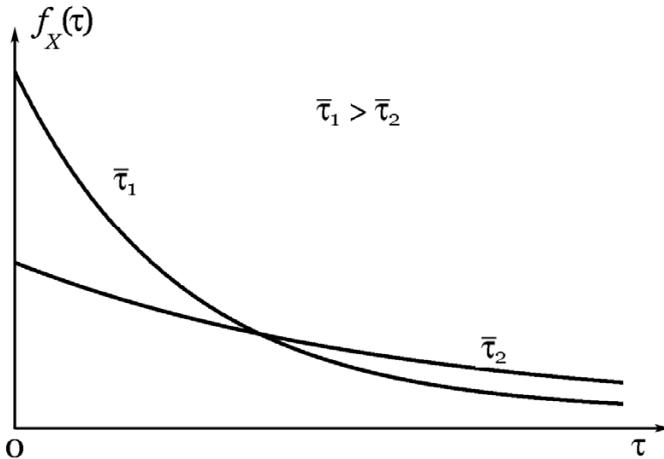


Рис. 1.5.2. Экспоненциальная плотность распределения вероятностей.

приведены ее графики для двух различных значений среднего временного интервала.

В заключение данного раздела приведем без подробных комментариев ряд распределений, которые также достаточно часто встречаются при проведении статистического анализа данных.

### ***Распределения вероятностей дискретных величин:***

#### **Распределение Бернулли**

(частный случай биномиального распределения)

$$P(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\bar{X} = p, \quad \sigma_x^2 = p(1-p).$$

#### **Распределение Паскаля**

$$P(x) = C_{x-1}^{m-1} p^m q^{x-m}, \quad x = m, m+1, m+2, \dots,$$

$$m \geq 1 - \text{целое}, \quad 0 < p < 1, \quad q = 1 - p,$$

$$\bar{X} = mp^{-1}, \quad \sigma_x^2 = mqp^{-2}.$$

### ***Распределения вероятностей непрерывных величин:***

#### **Бета-распределение**

$$f_x(x) = \frac{1}{B(u, v)} \frac{x^{u-1}}{(1+x)^{u+v}} = \frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(u)\Gamma(v)} x^{u-1} (1+x)^{-u+v},$$

$$x > 0, \quad u > 0, \quad v > 0,$$

$$\bar{X} = \frac{u}{v-1}, \quad v > 1, \quad \sigma_x^2 = \frac{u(u+v-1)}{(v-1)^2(v-2)}, \quad v > 2.$$

#### **Распределение Максвелла**

$$f_x(x) = \frac{2x^2}{a^3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \quad a > 0,$$

$$\bar{X} = 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \sigma_X^2 = \frac{3\pi-8}{\pi}a^2.$$

### Распределение Коши

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi} \left[ a^2 + (x-b)^2 \right]^{-1}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$a > 0, \quad -\infty < b < \infty.$$

Математическое ожидание и дисперсия не определены.

### Распределение Эрланга

$$f_X(x) = a^n x^{n-1} \frac{\exp(-ax)}{(n-1)!}, \quad x > 0,$$

$$a > 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\bar{X} = na^{-1}, \quad \sigma_X^2 = na^{-2}.$$

### Гамма-распределение

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0, \quad \alpha > 0,$$

$$\bar{X} = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \sigma_X^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

### Распределение Лапласа

$$f_X(x) = \frac{a}{2} \exp(-a|x-b|),$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < b < \infty, \quad a > 0,$$

$$\bar{X} = b, \quad \sigma_X^2 = 2a^{-2}.$$

**Распределение Вейбулла**

$$f_X(x) = abx^{b-1} \exp(-ax^b), \quad x > 0,$$

$$a > 0, \quad b > 0,$$

$$\bar{X} = (1/a)\Gamma(1+b^{-1})$$

$$\sigma_X^2 = (1/a)^{2/b} \left( \Gamma(1+2b^{-1}) - [\Gamma(1+b^{-1})]^2 \right).$$

Особым образом выделим распределения, используемые в математической статистике.

 **$\chi^2$ -распределение Пирсона**

$$f_X(x) = \left[ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]^{-1} 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x > 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\bar{X} = n, \quad \sigma_X^2 = 2n.$$

 **$t$ -распределение Стьюдента**

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty,$$

$v$  – положительное целое число,

$$\bar{T} = 0, \quad \sigma_T^2 = \frac{v}{v-2}, \quad v > 2.$$

 **$F$ -распределение Фишера-Снедекора**

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right)} \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{u}{2}} x^{\frac{u}{2}-1} \left(1 + \frac{u}{v}x\right)^{-\frac{u+v}{2}}, \quad x > 0,$$

$u, v$  – целые положительные числа,

$$\bar{X} = \frac{v}{v-2}, \quad v > 2; \quad \sigma_x^2 = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)}, \quad v > 4.$$

### **1.6. Оценка отклонения анализируемого распределения от нормального. Асимметрия и эксцесс**

При определении плотностей распределений вероятностей реальных случайных величин приходится убеждаться, что часто в графическом представлении они имеют колоколообразный вид. При изучении таких распределений, возникает необходимость количественно оценить их отличие от нормального. С этой целью вводят специальные характеристики, в частности, асимметрию и эксцесс. Для нормального распределения эти характеристики равны нулю. Поэтому если асимметрия и эксцесс имеют небольшие значения, предполагается близость этого распределения к нормальному. Наоборот, большие значения этих двух параметров указывают на значительное отклонение от нормального.

Как оценить асимметрию? Можно доказать, что для симметричного распределения (график такого распределения симметричен относительно прямой  $x = E[X]$ ) каждый центральный момент нечетного порядка равен нулю. Для несимметричных распределений центральные моменты нечетного порядка отличны от нуля. Поэтому любой из этих моментов (кроме момента первого порядка, который равен нулю для любого распределения) может служить для оценки асимметрии. Проще всего выбрать момент третьего порядка  $\mu_3$ . Однако принять его для оценки асимметрии неудобно из-за его зависимости от единиц измерения случайной величины. Для устранения этого не-

достатка,  $\mu_3$  делят на  $\sigma^3$ , получая безразмерную характеристику.

*Асимметрией* распределения называют отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратичного отклонения:

$$A_S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \quad (1.6.1)$$

Асимметрия положительна, если «длинная часть» кривой распределения расположена справа от математического ожидания, и отрицательна, если она расположена слева от математического ожидания.

На практике определяют знак асимметрии по расположению кривой распределения относительно моды (точки максимума функции плотности распределения вероятностей): если «длинная часть» кривой расположена правее моды, то асимметрия положительна (рис. 1.6.1, а), если слева – отрицательна (рис. 1.6.1, б).

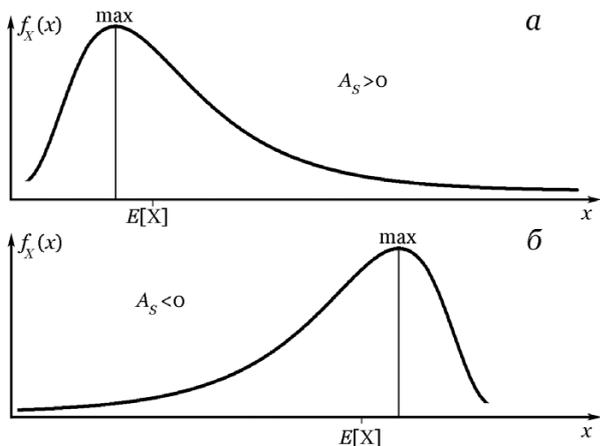


Рис. 1.6.1. Плотности распределения вероятностей при положительном (а) и отрицательном (б) коэффициентах асимметрии.

Для оценки крутизны, т.е. большего или меньшего подъема, кривой изучаемого распределения по сравнению с нормальным, пользуются характеристикой – эксцессом.

Эксцессом распределения называют характеристику, которая определяется равенством

$$E_k = (\mu_4 / \sigma^4) - 3. \quad (1.6.2)$$

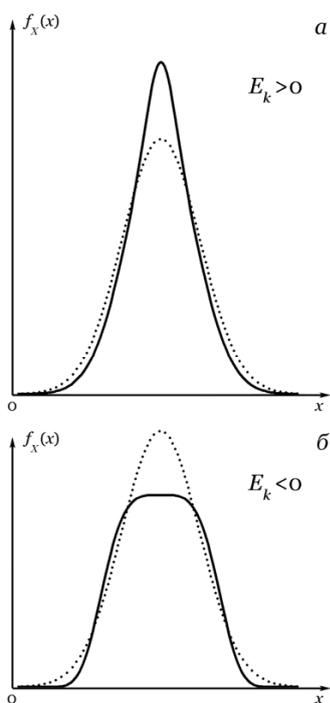


Рис. 1.6.2. Плотности распределения вероятностей при положительном (а) и отрицательном (б) эксцессах. Пунктир – нормальная кривая.

Для нормального распределения  $\mu_4 / \sigma^4 = 3$ ; то есть, эксцесс равен нулю. Поэтому если эксцесс некоторого распределения отличен от нуля, то кривая этого распределения отличается от нормальной: если эксцесс положительный, то график имеет более высокую и «острую» вершину, чем нормальная кривая (рис. 1.6.2, а), а если отрицательный, то он ниже и «плосче», чем нормальная кривая (рис. 1.6.2, б). При этом предполагается, что нормальное и изучаемое распределение имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии.

### 1.7. Характеристическая функция

Пусть дана непрерывная случайная величина  $X$  и соответствующая ей плотность вероятности  $f_X(x)$ .

Для ряда задач удобно ввести функцию от переменной  $u$ , которая представляет собой математическое ожидание величины  $e^{jux}$ . Она называется *характеристической функцией* случайной величины  $X$ . По определению, эта функция  $\varphi(u)$  равна

$$\varphi(u) = e^{\overline{jux}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} f_X(x) dx. \quad (1.7.1)$$

Здесь  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица.

Из свойств интеграла Фурье следует обратная формула

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-jux} du. \quad (1.7.2)$$

Введение характеристической функции связано с тем, что ее последовательные производные, в которых положено  $u = 0$ , представляют собой, с точностью до коэффициента  $\pm j$ , начальные моменты того же порядка. Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1, \\ \varphi'(0) &= j \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = j \overline{X}, \\ &\vdots \\ \varphi^{(r)}(0) &= j^r \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x) dx = j^r \overline{X^r}. \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

---

Если характеристическая функция случайной величины известна, то для определения моментов целесообразно воспользоваться соотношениями (3), а не интегрировать функцию плотности распределения вероятностей.

### 1.8. Центральная предельная теорема

В ходе анализа статистических характеристик встречающихся на практике разнообразных случайных физических величин можно убедиться в том, что чаще всего их функции распределения оказываются близкими к нормальным. Чем это объясняется? Ответ на тот вопрос дает *центральная предельная теорема*, доказанная А.М. Ляпуновым. Ее смысл передает следующая формулировка: если случайная величина  $X$  представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то  $X$  имеет распределение близкое к нормальному. Поскольку флуктуации любой физической величины являются следствием наложения многочисленных случайных факторов (колебания температуры, влажности, давления и т.д.), центральная предельная теорема дает правильный ориентир в оценке характера распределения вероятностей.

Центральную предельную теорему можно сформулировать более строго. Пусть  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – независимые случайные переменные с произвольными распределениями (не обязательно одинаковыми), имеющими средние значения  $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \dots, \overline{X_n}$  и дисперсии  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ . Кроме того, пусть  $Z$  – случайная переменная, которая определяется следующим образом:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \overline{X}_i}{\sigma_i}. \quad (1.8.1)$$

Тогда при стремлении случайных переменных  $n$  к бесконечности плотность распределения  $f_Z(z)$  стремится к гауссовой нормальной плотности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (1.8.2)$$

В указанной выше формулировке центральная предельная теорема выполняется, если существуют два положительных числа  $p$  и  $q$ , такие, что при всех  $i$

$$\sigma_i^2 > p, \quad E\left[|X_i - \overline{X}_i|^3\right] < q.$$

Теорема нашла использование при решении многих оптических задач. При этом следует отметить, что не всегда в этих задачах присутствуют случайные факторы. Часто центральная предельная теорема реализуется в детерминированных процессах, сопряженных с прохождением оптического излучения через систему многочисленных оптических элементов. Примеры таких процессов приведены в *приложении 4*.

### **1.9. Совместные распределения случайных величин. Условные функции распределения и плотность распределения вероятностей**

При изучении разнообразных явлений часто приходится иметь дело с несколькими случайными величинами. На системы случайных величин могут быть распространены все основные понятия и определения, относящиеся к отдельным случайным величинам. В

дальнейшем мы ограничимся анализом системы из двух величин  $X$  и  $Y$ .

Определим *двумерную (совместную) функцию распределения вероятностей* случайных величин  $X$  и  $Y$  как вероятность события, при котором случайная величина  $X$  принимает значение, меньшее или равное  $x$ , и случайная величина  $Y$  принимает значение, меньшее или равное  $y$ , т.е.

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y). \quad (1.9.1)$$

А *двумерную (совместную) плотность распределения вероятностей*  $f(x, y)$ , будем считать равной производной функции  $F(x, y)$ . Поскольку  $F(x, y)$  зависит от двух независимых переменных  $x$  и  $y$ , дифференцирование нужно выполнять по обоим переменным. Таким образом,

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad (1.9.2)$$

где порядок дифференцирования может быть любой. При этом элемент вероятности можно записать в виде  $f(x, y)dx dy = P(x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy)$ . (1.9.3)

Дадим теперь определение *условной функции вероятности случайной величины  $X$*  при условии, что произошло событие  $M$ . Эта функция обозначается  $F(x|M)$  и определяется выражением

$$F(x|M) = P\{X \leq x|M\} = \frac{P\{X \leq x, M\}}{P(M)}, \quad (1.9.4)$$

$$P(M) > 0,$$

где  $\{X \leq x, M\}$  – событие, заключающееся в появлении любого из исходов  $\xi$ , таких, что  $X(\xi) \leq x$  и  $\xi \in M$ , причем  $X(\xi)$  – значение случайной величины  $X$ , принимаемое ей, если исход опыта есть  $\xi$ .

Условные функции распределения и плотности вероятностей связаны между собой так же, как и обычные, то есть, если производная существует, то

$$f(x|M) = \frac{dF(x|M)}{dx}. \quad (1.9.5)$$

Событие  $M$  можно связать со случайной величиной  $Y$ . В частности, обозначив через  $M$  наступление события  $\{Y \leq y\}$ . По определению условной функции распределения вероятностей (4), следует, что

$$F_X(x|Y \leq y) = \frac{P[X \leq x, M]}{P(M)} = \frac{F(x, y)}{F_Y(y)}. \quad (1.9.6)$$

Если через  $M$  обозначить событие  $\{y_1 < Y \leq y_2\}$ , то из (4) следует, что

$$F_X(x|y_1 < Y \leq y_2) = \frac{F(x, y_2) - F(x, y_1)}{F_Y(y_2) - F_Y(y_1)}. \quad (1.9.7)$$

Обычно условную плотность распределения вероятностей записывают в виде

$$f_X(x|Y = y) = \frac{\partial F(x|Y = y)}{\partial x} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}. \quad (1.9.8)$$

Меняя местами случайные величины  $X$  и  $Y$ , получим

$$f_Y(y|X = x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}. \quad (1.9.9)$$

В связи с широким применением формул (8) и (9), удобно пользоваться сокращенной записью. Поэтому если не возникает двусмысленности, то  $f_X(x|y)$  и  $f_Y(y|x)$  в последующем будем записывать в виде

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad (1.9.10)$$

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \quad (1.9.11)$$

Исключая из (10) и (11)  $f(x, y)$ , сразу получим

$$f(y|x) = f(x|y) \frac{f_Y(y)}{f_X(x)}. \quad (1.9.12)$$

Формула (12) известна, как *формула Байеса*.

### 1.10. Плотность распределения вероятностей суммы (разности) двух случайных величин

При рассмотрении задачи о нахождении плотности распределения вероятностей суммы (разности) двух случайных величин будем считать, что эти величины являются статистически независимыми.

Пусть случайная величина  $Z$  является суммой случайных величин  $X$  и  $Y$  с плотностями распределения вероятностей, соответственно,  $f_X(x)$  и  $f_Y(y)$ . Для нахождения плотности распределения вероятностей  $f_Z(z)$  случайной величины  $Z = X + Y$  воспользуемся *рис. 1.10.1*. Функцию распределения вероятностей случайной величины  $Z$ ,  $F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z)$ , можно получить, проинтегрировав двумерную плотность вероятностей  $f(x, y)$  по об-

ласти, расположенной под прямой  $x + y = z$ . Для любого заданного  $y$  значение  $x$  должно быть таким, чтобы выполнялось условие  $-\infty < x < z - y$ . Таким образом,

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y) dx dy. \quad (1.10.1)$$

В силу статистической независимости величин  $X$  и  $Y$ , их совместная плотность распределения вероятностей представима в виде произведения двух сомножителей. Тогда (1) примет вид

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{z-y} f_X(x) dx dy. \end{aligned} \quad (1.10.2)$$

Плотность распределения вероятностей случайной величины  $Z = X + Y$  можно найти, продифференцировав  $F_Z(z)$  по  $z$ . Таким образом,

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) f_X(z - y) dy, \quad (1.10.3)$$

поскольку переменная  $z$  фигурирует только в верхнем пределе второго интеграла. Выражение (3) указывает на то, что  $f_Z(z)$  представляет собой свертку одновременных плотностей распределения вероятностей случайных величин  $X$  и  $Y$ .

Таким образом,  $F_Z(z)$  представима не только в виде (1), но и как

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dx dy. \quad (1.10.4)$$

Выполнив те же действия, что и при выводе формулы (3), находим

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx. \quad (1.10.5)$$

Следовательно, свертку можно выполнять, используя любую из двух эквивалентных формул (4) и (5).

### 1.11. Корреляционный момент, коэффициент корреляции

При описании системы двух случайных величин большое значение имеет оценка корреляционного момента и коэффициента корреляции.

*Корреляционным моментом* (или *ковариацией*)  $\mu_{XY}$  двух случайных величин  $X$  и  $Y$  называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин:

$$\begin{aligned} \mu_{XY} &= M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\} = \\ &= \text{cov}(X, Y). \end{aligned} \quad (1.11.1)$$

Корреляционный момент равен нулю, если  $X$  и  $Y$  независимы (*некоррелированные*); если корреляционный момент отличен от нуля,  $X$  и  $Y$  – зависимые (*коррелированные*) величины.

Ковариация обладает следующими свойствами:

1. Ковариация симметрична,  $\mu_{XY} = \mu_{YX}$ .
2. Дисперсия случайной величины есть ее ковариация с самой собой,  $\mu_{XX} = \sigma_X^2$ ,  $\mu_{YY} = \sigma_Y^2$ .
3. Дисперсия суммы (разности) двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс (минус) уд-

военная ковариация этих случайных величин,  
 $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y] \pm 2\mu_{XY}$ .

4. Постоянный множитель можно вынести за знак ковариации,  $\text{cov}(cX, Y) = c \cdot \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, cY)$ .

5. Ковариация не изменится, если к одной из случайных величин (или к обеим сразу) прибавить постоянную,  $\text{cov}(X + c, Y) = \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, Y + c) = \text{cov}(X + c, Y + c)$ .

6. Ковариация двух случайных величин по абсолютной величине не превосходят произведения их средних квадратичных отклонений,  $|\mu_{XY}| \leq \sigma_X \sigma_Y$ .

Из определения корреляционного момента следует, что он имеет размерность, равную произведению размерности величин  $X$  и  $Y$ . Другими словами, величина корреляционного момента зависит от единиц измерения. По этой причине для одних и тех же величин корреляционный момент имеет различные значения в зависимости от единиц измерения. Для устранения этого недостатка используют иную числовую характеристику – коэффициент корреляции.

*Коэффициентом корреляции*  $r_{XY}$  случайных величин  $X$  и  $Y$  называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратичных отклонений этих величин:

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (1.11.2)$$

При таком определении  $r_{XY}$  является безразмерной величиной, не превосходящей единицы, т.е.  $|r_{XY}| \leq 1$ .

## Глава II. Случайные комплексные величины

### 2.1. Описание случайной комплексной переменной

При изучении процессов стохастизации волн часто приходится рассматривать случайные переменные, которые принимают комплексные значения. (Действительная часть переменной может, например, обозначать интенсивность или амплитуду, а мнимая – фазу волны). Поэтому будет полезным кратко изложить методы, использующие для описания комплексные случайные переменные.

В основе определения комплексной случайной переменной, как и любой случайной величины, лежат пространство событий  $\{A\}$  и множество соответствующих вероятностей  $P(A)$ . Если каждому событию  $A$  поставить в соответствие некоторое комплексное число  $\mathbf{u}(A)$ , то множеством возможных комплексных чисел с соответствующими мерами вероятностей будет определяться комплексная случайная переменная  $\mathbf{U}$ .

Для математического описания статистических свойств случайной переменной  $\mathbf{U}$  удобнее всего пользоваться совместными статистическими свойствами действительной и мнимой частей. Так, если  $\mathbf{U} = R + jI$  – комплексная случайная переменная, которая может принимать конкретные комплексные значения  $\mathbf{u} = r + ji$  ( $j = \sqrt{-1}$ ), то для полного описания переменной  $\mathbf{U}$  нужно указать или совместную функцию распределения переменных  $R$  и  $I$

$$F_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) = F_{RI}(r, i) = P\{R \leq r, I \leq i\}, \quad (2.1.1)$$

или совместную плотность распределения вероятностей переменных  $R$  и  $I$

$$f_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = f_{RI}(r, i) = \frac{\partial^2 F_{RI}(r, i)}{\partial r \partial i}, \quad (2.1.2)$$

Если имеется  $n$  комплексных случайных переменных  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_n$ , которые принимают конкретные значения  $\mathbf{u}_1 = r_1 + ji_1, \mathbf{u}_2 = r_2 + ji_2, \dots$ , то совместная функция распределения вероятностей может быть записана в виде

$$F_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = P\{R_1 \leq r_1, \dots, R_n \leq r_n, I_1 \leq i_1, \dots, I_n \leq i_n\}, \quad (2.1.3)$$

где рассматриваемая вероятность есть совместная вероятность того, что все указанные в фигурных скобках события имеют место, а аргумент функции  $F_{\mathbf{u}}$  представляет собой матрицу-столбец с  $n$  комплексными элементами

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}. \quad (2.1.4)$$

Совместной функции распределения  $F_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{u}})$  соответствует ее совместная плотность  $2n$  действительных переменных  $\{r_1, r_2, \dots, r_n, i_1, i_2, \dots, i_n\}$

$$p_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{u}}) = \frac{\partial^{2n} F_{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{u}})}{\partial r_1 \dots \partial r_n \partial i_1 \dots \partial i_n}. \quad (2.1.5)$$

## 2.2. Общая характеристика суммы случайных фазоров

Во многих областях физики, и в частности в оптике, приходится иметь дело с комплексными случайными переменными, представляющими собой сумму многих малых “элементарных” комплексных вкладов.

В роли таких комплексных чисел часто выступают *фазоры*, характеризующие амплитуду и фазу возмущения монохроматической или квазимонохроматической волны. Фазоры можно рассматривать как частный случай рассматриваемых во многих руководствах по статистической физике случайных векторов. Комплексное сложение большого числа малых независимых фазоров выполняется, например, при вычислении полной комплексной амплитуды волны, которая формируется при рассеянии на совокупности малых независимых рассеивателей. Рассмотрим свойства сумм комплексных случайных переменных, которые будем называть *суммами случайных фазоров*.

### 2.2.1. Исходные предположения

Рассмотрим сумму очень большого числа  $N$  фазоров, при этом пусть  $k$ -й фазор имеет случайную длину  $a_k/\sqrt{N}$  и случайную фазу  $\varphi_k$ . Результирующий фазор с длиной  $a$  и фазой  $\theta$  определяется следующим образом (рис. 2.2.1):

$$\mathbf{a} = a e^{j\theta} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{j\varphi_k}. \quad (2.2.1)$$

Для упрощения анализа сделаем ряд предположений, которые, как правило, выполняются на практике.

1. Амплитуда  $\alpha_k/\sqrt{N}$  и фаза  $\varphi_k$  элементарного фазора с номером  $k$  статистически независимы друг от

друга, а также от амплитуд и фаз всех других элементарных фазов.

2. Случайные переменные  $\alpha_k$  при всех  $k$  имеют одинаковые распределения вероятностей со средним значением  $\alpha$  и вторым моментом  $\overline{\alpha^2}$ .

3. Фазы  $\varphi_k$  распределены однородно на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

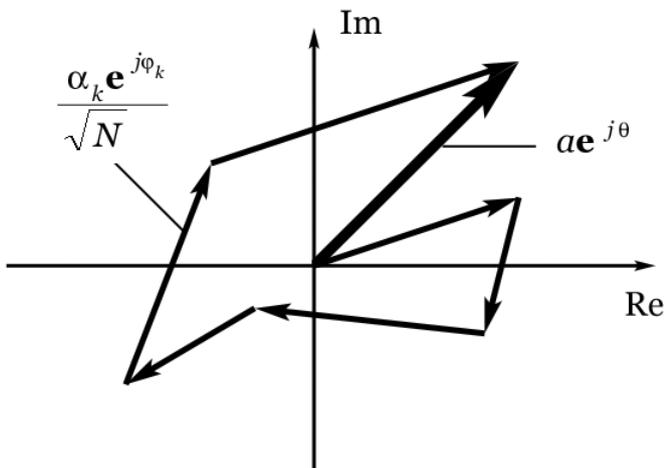


Рис. 2.2.1. Суммирование случайных фазов.

Пусть действительная и мнимая части  $r$  и  $i$  результирующего фазора имеют вид

$$r = \operatorname{Re}(a e^{j\theta}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \alpha_k \cos \varphi_k, \quad (2.2.2)$$

$$i = \operatorname{Im}(a e^{j\theta}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \alpha_k \sin \varphi_k.$$

Учитывая, что  $r$  и  $i$  представляют собой суммы многих независимых случайных вкладов, мы приходим к выводу, что в силу центральной предельной теоремы  $r$  и  $i$  будут приблизительно гауссовскими случайными переменными при больших значениях  $N$ . Сделанные предположения дают возможность определить основные статистические характеристики  $r$  и  $i$ .

Среднее значение действительной и мнимой частей  $r$  и  $i$  вычисляют следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \overline{\alpha_k \cos \varphi_k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \overline{\alpha_k \cos \varphi_k} = \sqrt{N} \overline{\alpha \cos \varphi}, \\ \bar{i} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \overline{\alpha_k \sin \varphi_k} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \overline{\alpha_k \sin \varphi_k} = \sqrt{N} \overline{\alpha \sin \varphi}. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $\alpha_k$  и  $\varphi_k$  независимы и распределены одинаково при всех  $k$ . Но, кроме того, согласно предположению 3, случайная переменная  $\varphi$  однородно распределена на интервале  $(-\pi, \pi)$ , что приводит к равенству  $\overline{\cos \varphi} = \overline{\sin \varphi} = 0$ , а отсюда к равенству

$$\bar{r} = \bar{i} = 0. \tag{2.2.4}$$

Таким образом, оказывается, что действительная и мнимая части имеют нулевые средние значения.

Чтобы вычислить дисперсии  $\sigma_r^2$  и  $\sigma_i^2$ , достаточно найти вторые моменты  $\overline{r^2}$  и  $\overline{i^2}$  (так как  $\bar{r} = \bar{i} = 0$ ). Поскольку амплитуды и фазы независимы, напомним

$$\begin{aligned}\overline{r^2} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \overline{\alpha_k \alpha_n \cos \varphi_k \cos \varphi_n}, \\ \overline{i^2} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \overline{\alpha_k \alpha_n \sin \varphi_k \sin \varphi_n}.\end{aligned}\quad (2.2.5)$$

Кроме того, выполняется соотношение

$$\overline{\cos \varphi_k \cos \varphi_n} = \overline{\sin \varphi_k \sin \varphi_n} = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq n, \\ 1/2, & \text{при } k = n, \end{cases}$$

вытекающее снова из однородного распределения фаз. Таким образом, имеем

$$\overline{r^2} = \overline{i^2} = \frac{\overline{\alpha^2}}{2} = \sigma^2. \quad (2.2.6)$$

В оптических задачах при суммировании большого числа случайных фазов, характеризующих обычно комплексные амплитуды световых волн, действительные и мнимые части суммы (соответственно  $R$  и  $I$ ) можно считать независимыми случайными величинами, подчиняющимися, согласно центральной теореме (см. (1.8.1) и (1.8.2)), нормальному закону. При этом совместная плотность распределения действительной и мнимой частей суммы случайных фазов имеет вид

$$f_{RI}(r, i) = f_R(r) f_I(i) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{r^2 + i^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (2.2.7)$$

где

$$\sigma^2 = \frac{\overline{\alpha^2}}{2}. \quad (2.2.8)$$

### 2.2.2. Распределение длины и фазы результирующего фазора

В предыдущем параграфе мы говорили о совместном распределении действительной и мнимой частей суммы случайных фазоров. Но во многих приложениях больший интерес представляет распределение длины  $a$  и фазы  $\theta$  результирующего фазора:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{r^2 + i^2}, \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{i}{r}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Обратные функции имеют вид

$$\begin{aligned} r &= a \cos \theta, \\ i &= a \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

а соответствующий якобиан

$$\|J\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial a} & \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial i}{\partial a} & \frac{\partial i}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -a \sin \theta \\ \sin \theta & a \cos \theta \end{vmatrix} = a. \quad (2.2.11)$$

Напоминаем, что  $\|J\| \equiv \det \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial a} & \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial i}{\partial a} & \frac{\partial i}{\partial \theta} \end{bmatrix}$ .

Таким образом, мы имеем совместную плотность распределения

$$f_{A\Theta}(a, \theta) = f_{RI}(r = a \cos \theta, i = a \sin \theta)a, \quad (2.2.12)$$

т.к.  $f_{A\Theta} = f_{RI} \cdot \|J\|$ . Распределение (12) в силу формулы (7) переходит в

$$f_{A\Theta}(a, \theta) = \begin{cases} \frac{a}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}, & \text{при } -\pi < \theta \leq \pi, a > 0, \\ 0, & \text{при прочих.} \end{cases} \quad (2.2.13)$$

На основе выражения (13) могут быть найдены *маргинальные (безусловные) плотности распределения* амплитуды и фазы. Интегрируя его сначала по углу  $\theta$ , получаем

$$f_A(a) = \int_{-\pi}^{+\pi} f_{A\Theta}(a, \theta) d\theta = \begin{cases} \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}, & \text{при } a > 0, \\ 0, & \text{при прочих.} \end{cases} \quad (2.2.14)$$

Эта функция соответствует рэлеевской плотности распределения, рассмотренной в *разделе 1.3*.

В оптических задачах, где в роли фазора выступает комплексная амплитуда световых колебаний, наряду с плотностями распределения амплитуды и фазы большую роль играет плотность распределения квадрата амплитуды – интенсивности. Обозначая интенсивность через  $I$  и используя соотношения (8) и (14), получаем для плотности распределения интенсивности выражение

$$f(I) = I_0^{-1} \exp\left(-\frac{I}{I_0}\right). \quad (2.2.15)$$

Здесь  $I_0$  – средняя интенсивность, равная  $I_0 = \sigma^2$ .

Соответствующее среднее значение и дисперсия равны

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma, \quad \sigma_a^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2. \quad (2.2.16)$$

Для нахождения плотности распределения фазы  $\theta$ , проинтегрируем выражение (13) по  $a$ . Получим

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{\sigma^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} da, & \text{при } -\pi < \theta \leq \pi, \\ 0, & \text{при прочих.} \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Поскольку получили в результате интеграл от рэлеевской плотности распределения, он должен быть равен единице. Отсюда следует, что фаза  $\theta$  суммы фазоров, распределенная на отрезке  $(-\pi, \pi)$ , однородна, т.е.

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \text{при } -\pi < \theta \leq \pi, \\ 0, & \text{при прочих.} \end{cases} \quad (2.2.18)$$

Заметим, что совместная плотность распределения  $f_{A\Theta}(a, \theta)$  может быть представлена в виде простого произведения маргинальных плотностей распределения  $f_A(a)$  и  $f_{\Theta}(\theta)$ . Следовательно,  $A$  и  $\Theta$  являются независимыми случайными переменными.

### 2.3. Некоторые частные случаи суммирования случайных фазоров

#### 2.3.1. Постоянный фазор и сумма случайных фазоров

Рассмотрим теперь результат сложения известного постоянного фазора и суммы случайных. Без потери общности можно считать, что известный фазор является действительным и положительным и имеет длину  $s$  (этого всегда можно добиться соответствующим выбором начала отсчета фазы). На *рис. 2.3.1* приведена

графическая иллюстрация получения комплексная суммы.

Действительная часть результирующего фазора равна

$$r = s + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \alpha_k \cos \varphi_k, \quad (2.3.1)$$

а мнимая часть –

$$i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \alpha_k \sin \varphi_k. \quad (2.3.2)$$

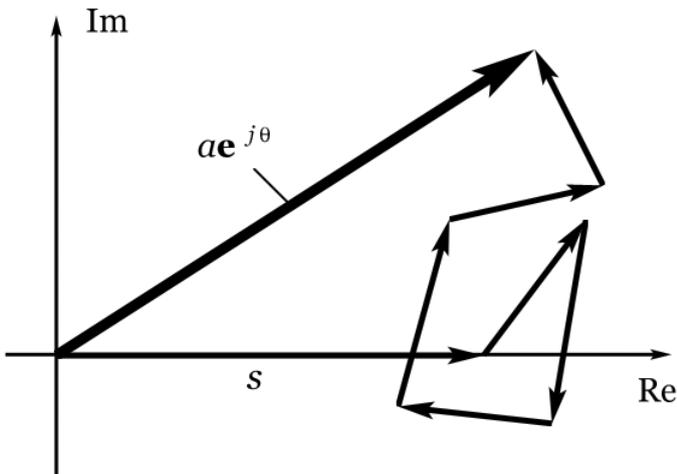


Рис. 2.3.1. Сумма постоянного фазора и суммы случайных фазоров.

Таким образом, единственным следствием добавления известного фазора к случайной сумме фазоров является изменение величины действительной части результата. В пределах больших  $N$  совместное

распределение величин  $R$  и  $I$  остается приблизительно-но гауссовским, но изменяется среднее значение, т.е.

$$f_{RI}(r, i) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(r-s)^2 + i^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (2.3.3)$$

Как и прежде, сосредоточимся на распределении длины  $a$  и фазы  $\theta$  результирующего фазора. Преобразование к полярным координатам совпадает с рассмотренным выше и якобиан преобразования остается равным  $A$ , так что совместная плотность распределения

$$f_{A\theta}(a, \theta) = \begin{cases} \frac{a}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(a\cos\theta-s)^2 + (a\sin\theta)^2}{2\sigma^2}}, & a > 0, \\ 0, & -\pi < \theta \leq \pi, \\ & \text{при прочих.} \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Чтобы найти маргинальную плотность распределения  $A$ , следует осуществить интегрирование

$$\begin{aligned} f_A(a) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_{A\theta}(a, \theta) d\theta = \\ &= \frac{a}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + s^2}{2\sigma^2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{as}{\sigma^2} \cos\theta\right) d\theta. \end{aligned}$$

Интеграл может быть представлен в виде  $2\pi I_0(as/\sigma^2)$ , где  $I_0$  – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Таким образом, получаем выражение

$$f_A(a) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + s^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{as}{\sigma^2}\right), & \text{при } a > 0, \\ 0, & \text{при прочих.} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Эта функция называется *обобщенной функцией распределения Рэлея* или *райсовской плотностью распределения вероятностей*.

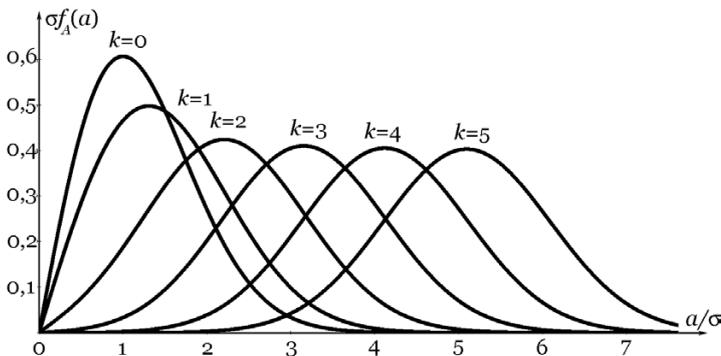


Рис. 2.3.2. Плотность распределения амплитуды  $A$  суммы, состоящей из постоянного фазора (длиной  $s$ ) и суммы случайных фазоров (дисперсия  $\sigma^2$ ). Параметр  $k = s/\sigma$ .

На *рис. 2.3.2* представлены зависимости величины  $\sigma f_A(a)$  от  $a/\sigma$  при разных значениях параметра  $k = s/\sigma$ . При увеличении модуля известного фазора плотность распределения изменяется от рэлеевской плотности до рассматриваемой далее (*раздел 2.3.2*) приблизительно гауссовской плотности со средним значением, равным  $s$ .

Представляют интерес два момента распределения, характеризуемого маргинальной плотностью (5). Это – среднее значение

$$\bar{a} = \int_0^{\infty} \frac{a^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + s^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{as}{\sigma^2}\right) da \quad (2.3.6)$$

и второй момент

$$\overline{a^2} = \int_0^{\infty} \frac{a^3}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + s^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{as}{\sigma^2}\right) da. \quad (2.3.7)$$

Вычисление интегралов приводит к следующим формулам:

$$\overline{a} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma e^{-k^2/4} \left[ \left(1 + \frac{k^2}{2}\right) I_0\left(\frac{k^2}{4}\right) + \frac{k^2}{2} I_1\left(\frac{k^2}{4}\right) \right], \quad (2.3.8)$$

$$\overline{a^2} = \sigma^2 [2 + k^2], \quad (2.3.9)$$

где  $I_0$  и  $I_1$  – модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков, соответственно.

Чтобы найти плотность распределения  $f_{\theta}(\theta)$  вероятностей для фазы, следует вычислить

$$f_{\theta}(\theta) = \int_0^{\infty} f_{A\theta}(a, \theta) da.$$

Интегрирование приводит к следующему результату:

$$f_{\theta}(\theta) = \frac{e^{-k^2/2}}{2\pi} + \frac{k \cos \theta}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{k^2 \sin^2 \theta}{2}\right] \Phi(k \cos \theta), \quad (2.3.10)$$

где

$$\Phi(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{-y^2/2} dy. \quad (2.3.11)$$

График функции  $f_{\theta}(\theta)$  при разных значениях  $k = s/\sigma$  представлен на *рис. 2.3.3*. При  $k = 0$  распределение однородно, а с увеличением  $k$  появляется пик плотности распределения, который сужается, сходясь

к  $\delta$ -функции при  $\theta = 0$ , т.е. при значении, равном фазе постоянного фазора.

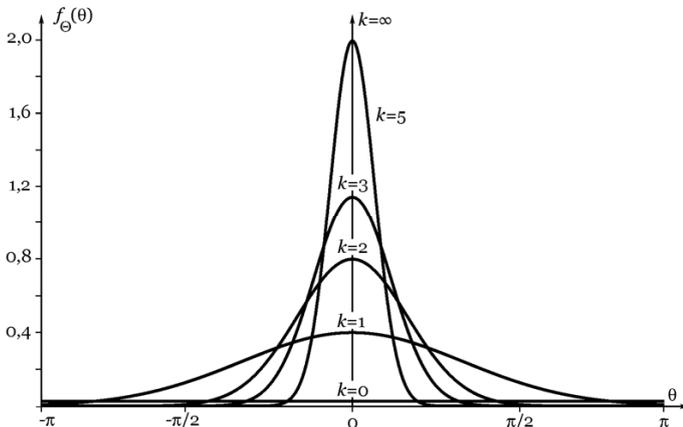


Рис. 2.3.3. Плотность распределения  $f_{\theta}(\theta)$  суммы постоянного фазора и случайных фазоров. Параметр  $k = s/\sigma$ .

### 2.3.2. Большой постоянный фазор и малая сумма случайных фазоров

Если известный фазор по модулю значительно больше суммы случайных фазоров, то определение их общей суммы значительно упрощается. Будем считать, что  $s \gg \sigma$  (или  $k \gg 1$ ). При таких допущениях совокупность случайных фазоров можно рассматривать в виде малого “облака”, центр которого совпадает с концом известного фазора (рис. 2.3.4). В этом случае с очень большой вероятностью длина результирующей суммы будет намного меньше длины известного фазора. Вследствие этого изменения длины  $a$  полного результирующего фазора определяются действительной частью суммы, а изменения фазы – ее мнимой

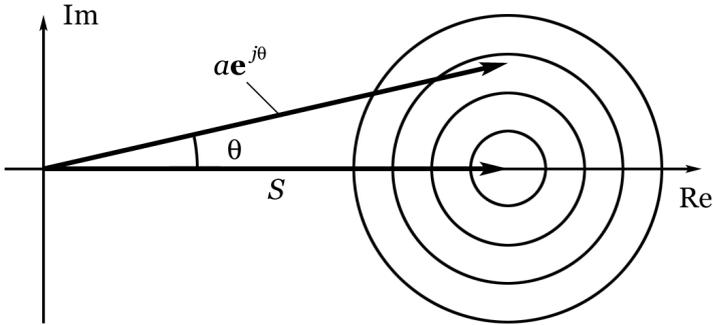


Рис. 2.3.4. Постоянный фазор большой длины  $s$  и малое “шумовое облако”.

частью, ортогональной известному фазору. Поскольку действительная часть суммы является гауссовской функцией с нулевым средним значением, можно считать, что

$$f_A(a) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(a-s)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad s \gg \sigma. \quad (2.3.12)$$

При  $s \gg \sigma$

$$\theta \approx \operatorname{tg} \theta \approx \frac{i}{s}, \quad (2.3.13)$$

и

$$f_\theta(\theta) \approx \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{k^2\theta^2}{2}\right\}. \quad (2.3.14)$$

При этом  $\bar{a} = s$ ,  $\sigma_a^2 = \sigma^2$ ,  $\bar{\theta} = 0$ ,  $\sigma_\theta^2 = 1/k^2 = \sigma^2/s^2$ .

Наиболее характерными, с точки зрения оптических приложений теории фазоров, являются задачи

прохождения излучения через случайные экраны и неоднородные среды. Важную роль сыграли рассмотренные в этой главе теоретические представления для объяснения причин появления и свойств *спекл-структуры* световых полей в оптических изображениях объектов (*приложение 5*).

---

## Глава III. Элементы математической статистики

### 3.1. Выборки

Рассмотрим основные понятия теории выборок. Всю совокупность экспериментальных данных будем называть *генеральной совокупностью* (ее число элементов  $N$  называют *объемом*). Часть генеральной совокупности, случайно выбранной из нее, называют *выборкой*. Для того чтобы по данным выборки можно было судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы элементы выборки точно его представляли. Иными словами она должна быть *репрезентативной*.

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если осуществить ее случайно: каждый элемент выборки извлечен случайно из генеральной совокупности и все элементы имеют одинаковую вероятность быть отобранными.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем  $x_1$  в ней встречается  $n_1$  раз,  $x_2 - n_2$  раз,  $x_k - n_k$  раз и  $\sum n_i = n$ . Фиксируемые значения  $x_i$  называются *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – *вариационным рядом*. Числа  $n_i$  называют *частотами*, а их отношения к объему выборки –  $n_i/n = W_i$  – *относительными частотами*.

Выборка, содержащая  $n$  элементов, характеризуется различными параметрами, но один из наиболее важных – *выборочное среднее*, определяемое формулой

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3.1.1)$$

где  $x_i$  – значения элементов выборки. Можно считать, что совокупность значений  $x_i$  представляет собой случайную величину  $X$  с некоторой плотностью распределения вероятностей  $f_X(x)$ .

Обычно требуется описать статистические свойства произвольных случайных выборок, а не какой-то одной из них. В этом случае выборочное среднее, так же как и элементы выборки, рассматриваются как случайные величины. При этом выборочное среднее определяется с помощью выражения

$$\widehat{\bar{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (3.1.2)$$

где  $X_i$  – случайная величина с плотностью распределения вероятностей  $f(x)$ , принадлежащая генеральной совокупности. В дальнейшем мы будем по-прежнему обозначать случайные величины и принимаемые ими значения соответственно прописными и строчными буквами.

Среднее значение для генеральной совокупности, из которой производится выборка, будем называть *генеральным средним* и обозначать  $\bar{X}$ . Можно ожидать, что выборочное среднее не будет заметно отличаться от генерального среднего. Поскольку обычно выборочное среднее является случайной величиной, для него можно найти математическое ожидание

$$E\left[\widehat{\bar{X}}\right] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{X}_i = \bar{X}. \quad (3.1.3)$$

Таким образом, математическое ожидание выборочного среднего равно генеральному, т.е. является *несмещенной оценкой* генерального среднего. Широко употребляющийся в математической статике термин несмещенная оценка, означает, что математическое ожидание оценки параметра равно математическому ожиданию параметра.

Отметим, что выборочное среднее представляет собой случайную величину. Принимаемые им значения для конкретных реализаций (*эмпирическое выборочное среднее*) флуктуирует около значения генерального. Величину этих отклонений характеризует дисперсия выборочного среднего.

Пусть объем выборки много меньше объема генеральной совокупности, т.е.  $n \ll N$ . Будем также считать, что при формировании выборок характеристики всей совокупности экспериментальных данных не меняются. Такое предположение эквивалентно условию  $N = \infty$ .

Для определения дисперсии выборочного среднего (*выборочной дисперсии*)  $D\left[\widehat{\bar{X}}\right]$ , найдем разность между средним квадратом и квадратом математического ожидания случайной величины  $\widehat{\bar{X}}$ , которое, как было установлено выше, равно генеральному среднему  $\bar{X}$ :

$$\begin{aligned} D\left[\widehat{\bar{X}}\right] &= E\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j\right] - (\bar{X})^2 = \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[X_i X_j] - (\bar{X})^2. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Поскольку  $X_i$  и  $X_j$  – параметры элементов генеральной совокупности, при  $i \neq j$  их можно считать

статистически независимыми случайными величинами. Следовательно,

$$E[X_i X_j] = \begin{cases} \overline{X^2}, & i = j, \\ (\overline{X})^2, & i \neq j. \end{cases}$$

С учетом этого соотношения (4) принимает вид

$$\begin{aligned} D\left[\widehat{\overline{X}}\right] &= (1/n)^2 \left[ n\overline{X^2} + (n^2 - n)(\overline{X})^2 \right] - (\overline{X})^2 = \\ &= (\overline{X^2} - (\overline{X})^2)/n = \sigma^2/n, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия генеральной совокупности (*генеральная дисперсия*). Из последнего выражения видно,

что с ростом  $n$  величина  $D\left[\widehat{\overline{X}}\right]$  уменьшается. Таким

образом, увеличение объема выборки приводит к повышению точности оценки генерального среднего, поскольку математическое ожидание выборочного среднего всегда равно генеральному среднему независимо

от объема выборки, а выборочная дисперсия  $D\left[\widehat{\overline{X}}\right]$

при увеличении  $n$  уменьшается.

### 3.2. Выборочная дисперсия

Во избежание дублирования обозначений, будем использовать для выборочной дисперсии символ  $S^2$ . Так,  $S^2$  для выборки, состоящей из случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , равна

$$S^2 = (1/n) \sum_{i=1}^n \left( X_i - \widehat{\overline{X}} \right)^2 = (1/n) \sum_{i=1}^n \left[ X_i - (1/n) \sum_{j=1}^n X_j \right]^2. \quad (3.2.1)$$

Последний член в квадратных скобках в правой части этого выражения есть выборочное среднее, таким образом, выборочная дисперсия представляет собой среднее значение квадрата разности случайных величин и выборочного среднего.

Раскрыв в (1) скобки и определив математические ожидания каждого члена суммы, после ряда преобразований получаем

$$E[S^2] = \frac{\sigma^2(n-1)}{n}, \quad (3.2.2)$$

где  $\sigma^2$  – генеральная дисперсия. Математическое ожидание выборочной дисперсии не равно генеральной дисперсии, значит это *смещенная оценка*. Ситуация меняется, если перейти к *исправленной дисперсии*  $s^2$

$$s^2 = S^2 n/(n-1) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( X_i - \bar{X} \right)^2. \quad (3.2.3)$$

Исправленная дисперсия – несмещенная оценка (ее математическое ожидание равно генеральной дисперсии).

Формулы (2) и (3) справедливы для генеральной совокупности бесконечно большого объема. Если же объем генеральной совокупности ограничен и равен  $N$ , то

$$E[S^2] = \frac{\sigma^2 N(n-1)}{n(N-1)}. \quad (3.2.4)$$

Мы опять получили смещенную оценку. Смещение устранимо, если  $s^2$  определить как

$$s^2 = S^2 n(N-1)/N(n-1). \quad (3.2.5)$$

Таким образом, при  $N \rightarrow \infty$  формулы (4) и (5) сводятся к (2) и (3).

Выполнив ряд дополнительных преобразований, можно получить формулы для дисперсии оценок выборочной дисперсии. Они имеют вид

$$D[S^2] = (\mu_4 - \sigma^4)/n, \quad (3.2.6)$$

где

$$\mu_4 = E[(X - \bar{X})^4] \quad (3.2.7)$$

представляет собой генеральный центральный момент 4-го порядка. С учетом формул (2) и (3)

$$D[S^2] = n(\mu_4 - \sigma^4)/(n-1)^2. \quad (3.2.8)$$

### 3.3. Доверительный интервал

В математической статистике важным является понятие *доверительного интервала*. Хотя этот термин чаще используется в теории оценок, удобнее обсудить его здесь применительно к функциям распределения выборочного среднего. Определенное выше выборочное среднее представляет собой *точечную оценку*, поскольку ему приписывается единственное значение. Кроме того, можно использовать *интервальную оценку*, утверждающую, что оцениваемый параметр с определенной вероятностью принимает значение, лежащее в заданном интервале, называемом *доверительным*.

Интервал, в пределы которого оценка попадает с вероятностью  $q/100\%$ , называется  $q\%$ -ым доверительным интервалом. Границы этого интервала называются *доверительными*, а  $q$  — *доверительным уровнем*.

Для выборочного среднего доверительный интервал определяется следующим образом:

$$\bar{X} - \frac{k\sigma}{\sqrt{n}} \leq \hat{X} \leq \bar{X} + \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (3.3.1)$$

где  $k$  – постоянная, связанная с  $q$  и плотностью распределения вероятностей  $f_{\bar{X}}(x)$  случайной величины  $\hat{X}$ . С уровнем интервал связан соотношением

$$q = 100 \int_{\bar{X}-k\sigma}^{\bar{X}+k\sigma} f_{\bar{X}}(x) dx. \quad (3.3.2)$$

Если  $f_{\bar{X}}(x)$  подчиняется нормальному закону, то зависимость  $k$  от  $q$  представима в виде таблицы 3.3.1.

**Таблица 3.3.1. Ширина доверительного интервала для гауссовского распределения**

$q, \%$	$k$
90	1,64
95	1,96
99	2,58
99,9	3,29
99,99	3,89

Эта таблица удобна для практического применения. Задавая доверительный уровень  $q$ , из нее можно найти постоянную  $k$ , а затем по известным величинам  $\bar{X}$ ,  $\sigma$ ,  $n$  – границы доверительного интервала.

### 3.4. Аппроксимация экспериментальных данных и линейная регрессия

Задача, связанная с подбором математического выражения, описывающего связь между экспериментальными данными, называется *аппроксимацией*. Само математическое выражение называют *уравнением регрессии* (*регрессией*), а соответствующую кривую – *линией регрессии*.

На *рис. 3.4.1* показаны отклонения  $d_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  линии регрессии от точек, соответствующих значениям, принимаемым случайными величинами  $X$  и  $Y$ .

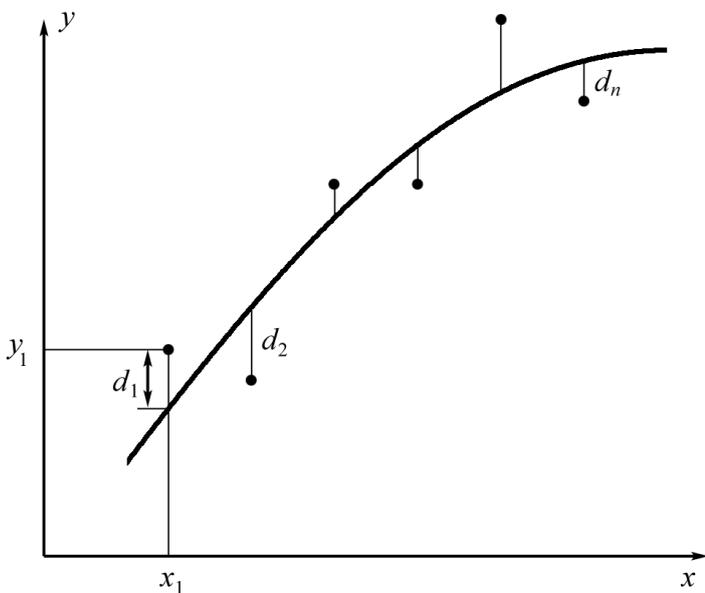


Рис. 3.4.1. Отклонение линии регрессии от экспериментальных данных на диаграмме рассеяния.

Одним из широко принимаемых на практике критериев оптимальности регрессии является критерий

минимума суммы квадратов. В соответствии с этим критерием наилучшее согласование линии регрессии с результатами измерения достигается при выполнении условия

$$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 = \min. \quad (3.4.1)$$

Его применение позволяет при определении линии регрессии использовать хорошо известный *метод наименьших квадратов*, обеспечивающий построение линии регрессии, характеризуемой минимальным средним квадратом ее отклонения от результатов эксперимента. Обратите внимание на то, что критерий минимума среднего квадрата предполагает равенство вклада в выражение (1) отклонений, отличающихся лишь знаком, а также определяет, что большие по абсолютной величине отклонения входят в (1) с большим собственным весом.

После определения критерия оптимальности регрессии следует перейти к выбору типа уравнения регрессии. Чаще используется тип уравнения на основе полинома вида

$$y = a + bx + cx^2 + \dots + kx^j. \quad (3.4.2)$$

Существует возможность построить зависимость, описываемую полиномом  $(n-1)$ -ой степени и проходящую через все точки, однако, такой способ обычно не используется, поскольку не приводит к сглаживанию кривой, хотя этот график будет проходить через все заданные точки и сумма квадратов отклонений будет равна 0. Поскольку результаты измерений, как правило, случайны, предпочтительно аппроксимировать их средние значения. Поэтому обычно используют полиномы первой и второй сте-

пени. В этом разделе мы ограничимся первой степенью, чтобы сохранить простоту описания существенных аспектов метода. Метод аппроксимации полиномом первой степени называются *линейной регрессией*.

Уравнение линейной регрессии имеет вид

$$y = a + bx, \quad (3.4.3)$$

в котором следует определить значения  $a$  и  $b$ , удовлетворяющие (1). Для этого запишем (1) в форме

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2 = \min. \quad (3.4.4)$$

Для минимизации (4), продифференцируем его по  $a$  и по  $b$  и приравняем производные нулю. В результате получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^n y_i = an + b \sum_{i=1}^n x_i, \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + bn \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

решив которую, найдем искомые значения  $a$  и  $b$ :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \quad (3.4.5)$$

$$= (1/n) \sum_{i=1}^n y_i - (b/n) \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (3.4.6)$$

---

Хотя формулы (5) и (6) достаточно сложны, значения  $a$  и  $b$  нетрудно вычислить с помощью компьютера.

### 3.5. Проверка статистических гипотез

*Статистической* называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений. Например, статистическими являются гипотезы:

- 1) генеральная совокупность распределена по закону Пуассона;
- 2) дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

В первой гипотезе сделано предположение о виде неизвестного распределения, во второй – о параметрах двух известных распределений.

*Нулевой (основной)* называют выдвинутую гипотезу  $H_0$ . *Конкурирующей (альтернативной)* называют гипотезу  $H_1$ , которая противоречит нулевой.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, распределение которой известно. Эту величину обозначают через  $U$  или  $Z$ , если она распределена нормально,  $F$  или  $v^2$  – по закону Фишера-Снедекора,  $T$  – по закону Стьюдента,  $\chi^2$  – по закону «хи-квадрат». В тех случаях, когда конкретный вид распределения несущественен, использующуюся случайную величину, в целях общности, будем обозначать через  $K$ .

*Статистическим критерием* (или просто *критерием*) называют случайную величину  $K$ , которая служит для проверки нулевой гипотезы.

Например, если проверяют гипотезу о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупно-

стей, то в качестве критерия  $K$  принимают отношение исправленных выборочных дисперсий:

$$F = s_1^2 / s_2^2 . \quad (3.5.1)$$

Эта величина случайная, потому что в различных опытах дисперсии принимают разные заранее неизвестные значения, и распределена по закону Фишера-Снедекора.

Для проверки гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и таким образом получают частное (наблюдаемое) значение критерия. Вычисленное по выборкам значение критерия называют *наблюдаемым значением  $K$* .

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непесекающихся подмножества. Одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая – при которых она принимается.

*Критической областью* называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

*Область принятия гипотезы (областью допустимых значений)* называют совокупность значений критерия, при которых гипотезу принимают.

Исходя из этих представлений, основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области – гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы – гипотезу принимают.

*Критическими точками (границами)  $k_{кр}$*  называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают одностороннюю (правостороннюю и левостороннюю) и двухстороннюю критические области.

*Правосторонней* называют область, определяемую неравенством  $K > k_{кр}$  (рис. 3.5.1, а), где  $k_{кр}$  – положительное число.

*Левосторонней* называют область, определяемую неравенством  $K < k_{кр}$ , где  $k_{кр}$  – отрицательное число (рис. 3.5.1, б).

*Односторонней* называют правостороннюю или левостороннюю критические области.

*Двухсторонней* называют область (рис. 3.5.1, в), определяемую неравенствами  $K < k_1$ ,  $K > k_2$ , где  $k_2 > k_1$ .

Рассмотрим процедуру нахождения критических областей. Начнем с правосторонней. Зададимся достаточно малой вероятностью – уровнем значимости  $\alpha$ . Критическую точку  $k_{кр}$  будем искать, исходя из требования условия справедливости нулевой гипотезы и равенства вероятности того, что критерий  $K$  примет значение, большее  $k_{кр}$ , принятому уровню значимости

$$P(K > k_{кр}) = \alpha. \quad (3.5.2)$$

На практике критическую точку, удовлетворяющую этому требованию, обычно находят, используя специальные таблицы, построенные для каждого критерия.

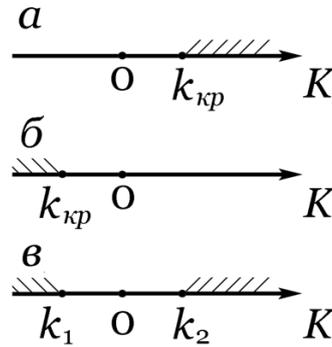


Рис. 3.5.1. Расположение критических областей.

Для нахождения левосторонней критической области используют выражение

$$P(K < k_{кр}) = \alpha. \quad (3.5.3)$$

Если критическая область носит двухсторонний характер, то вероятностное выражение будет иметь вид

$$P(K > k_{кр}) + P(K < k_{кр}) = \alpha. \quad (3.5.4)$$

В качестве примера проверки статистической гипотезы рассмотрим процедуру сравнения исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности. Пусть генеральная совокупность распределена нормально, причем генеральная дисперсия хотя и неизвестна, но имеются основания предполагать, что она равна значению (гипотетическому)  $\sigma_0^2$ . На практике  $\sigma_0^2$  устанавливается на основании предшествующего опыта или теоретически.

Предположим, что из генеральной совокупности извлечена выборка объема  $n$  и по ней найдена выборочная дисперсия  $S^2$  с  $k = n - 1$  степенями свободы. Требуется по исправленной дисперсии при заданном уровне значимости проверить гипотезу, состоящую в том, что генеральная дисперсия, рассматриваемой совокупности, равна гипотетическому значению  $\sigma_0^2$ . Нулевую гипотезу можно записать в виде

$$H_0: M(S^2) = \sigma_0^2. \quad (3.5.5)$$

Тем самым, требуется проверить, что математическое ожидание исправленной дисперсии равно гипотетическому значению генеральной дисперсии. Иными словами, требуется установить, значимо или незна-

чимо различаются исправленная выборочная и гипотетическая генеральные дисперсии. В качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину  $(n-1)S^2/\sigma_0^2$ . Поскольку можно доказать, что она имеет распределение  $\chi^2$  с  $k = n - 1$  степенями свободы, обозначим ее через  $\chi^2$ .

Таким образом, критерий проверки нулевой гипотезы

$$\chi^2 = (n-1)S^2/\sigma_0^2. \quad (3.5.6)$$

Если конкурирующей гипотезе  $H_0$  придать вид  $\sigma^2 = \sigma_0^2$ , то критическая область (в данном случае правосторонняя) находится, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область, в предположении справедливости нулевой гипотезы, была равна принятому уровню значимости:

$$P[\chi^2 > \chi_{кр}^2(\alpha; k)] = \alpha. \quad (3.5.7)$$

Критическую точку  $\chi_{кр}^2(\alpha; k)$  обычно находят по таблице критических точек распределения  $\chi^2$ , которая присутствует во многих справочных руководствах. В итоге, правосторонняя критическая область определяется с помощью неравенства  $\chi^2 > \chi_{кр}^2$ , а область принятия нулевой гипотезы – неравенством  $\chi^2 < \chi_{кр}^2$ .

Рассмотренные в данной главе методы математической статистики играют большую роль в обработке экспериментальных данных. Некоторые практические аспекты, связанные с получением выборок данных и их предварительным анализом, изложены в *приложении 6*.

## Глава IV. Анализ случайных процессов

### 4.1. Общие характеристики случайных процессов. Стационарные и эргодические процессы

*Случайный процесс* представляет собой совокупность функций времени и имеет вероятностное описание. Точечные функции процесса для фиксированных моментов времени являются случайными числами.

Полная совокупность функций времени представляет собой ансамбль, и будет обозначаться  $\{x(t)\}$ , где любая функция  $x(t)$ , ему принадлежащая, есть выборочная функция случайного процесса. Произвольная случайная функция обозначается  $X(t)$ . Значения ее реализаций  $x(t)$  в некоторый момент времени  $t_1$  определяют случайную величину  $X(t_1)$  или просто  $X_1$ .

Рассмотрим вероятностные характеристики совокупности реализаций случайного процесса.

Рассмотрим  $N$  реализаций случайной функции. Выделим из них  $n_1$ , значения которых в определенный момент времени  $t_1$  меньше, чем некоторое число  $x_1$ . При достаточно большом числе  $N$  относительная доля  $n_1(x_1, t_1)$  функций, находящихся в момент времени ниже уровня  $x_1$ , будет обладать статистической устойчивостью, т.е. будет оставаться приблизительно постоянным числом. Это число называется *вероятностью* того, что при  $t = t_1$  случайная функция  $X(t_1)$  находится ниже уровня  $x_1$  и обозначается  $P\{X(t_1) \leq x_1\}$ .

Указанная вероятность, так же как и число  $n_1$ , зависит от фиксированного момента времени и от вы-

бранного уровня, т.е. будет функцией двух переменных  $t_1$  и  $x_1$ :

$$F_1(x_1, t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\}. \quad (4.1.1)$$

$F_1(x_1, t_1)$  – одномерная интегральная функция распределения вероятностей случайного процесса. Если она имеет частную производную по  $x_1$ :

$$\frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1, t_1), \quad (4.1.2)$$

то эта производная называется *плотностью вероятности* или одномерной функцией распределения случайного процесса.

Функции  $F_1(x_1, t_1)$  и  $f_1(x_1, t_1)$  являются простейшими характеристиками случайного процесса. Они дают представление о процессе лишь в отдельные, фиксированные моменты времени.

Для более полной характеристики случайного процесса необходимо знать связь между вероятными значениями случайной функции при двух произвольных моментах времени  $t_1$  и  $t_2$ . Для этого рассмотрим снова  $N$  реализаций случайной функции и выделим из этого числа  $n_2$ , значения которых в момент времени  $t_1$  меньше  $x_1$ , а в  $t_2$  – меньше  $x_2$ . Аналогично, при достаточно большом  $N$  относительная доля  $n_2(x_1, t_1, x_2, t_2)/N$  функций, находящихся при  $t = t_1$  ниже уровня  $x_1$  и при  $t = t_2$  ниже уровня  $x_2$ , будет обладать статистической устойчивостью, т.е. останется приблизительно постоянным числом. Это число называется вероятностью того, что при  $t = t_1$  случайная

функция находится ниже уровня  $x_1$  и при  $t = t_2$  – ниже уровня  $x_2$ .

Указанная вероятность  $P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$  является функцией четырех переменных  $x_1, x_2, t_1, t_2$ :

$$F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}, \quad (4.1.3)$$

и называется *двумерной интегральной функцией распределения вероятностей* случайного процесса.

Если функция  $F_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$  имеет производную

$$\frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_2(x_1, x_2, t_1, t_2), \quad (4.1.4)$$

то эта производная называется *двумерной плотностью вероятности* или *двумерной функцией распределения*.

По аналогии можно определить вероятность того, что случайная функция  $X(t)$  в  $n$  моментах времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  будет находиться ниже уровней соответственно  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned} P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} = \\ = F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n). \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Вероятность зависит от  $2n$  переменных и называется  *$n$ -мерной интегральной функцией распределения вероятностей* случайного процесса.

Если  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$  имеет производную

$$\frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n), \quad (4.1.6)$$

то эта производная называется *n*-мерной плотностью вероятности случайного процесса.

Последовательность функций  $f_1(x_1, t_1)$ ,  $f_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ , ...,  $f_n(x_1, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)$  представляет своеобразную лестницу, поднимаясь по которой удастся все более и более подробно характеризовать случайный процесс.

Если плотности вероятностей не зависят от выбора начала отсчета времени, то процесс называется *стационарным в узком смысле*. Менее жесткое требование стационарности заключается в том, чтобы математическое ожидание любой случайной величины  $X(t_1)$  не зависело от выбора  $t_1$ , а корреляционная функция двух случайных величин  $\langle X(t_1)X(t_2) \rangle$  была лишь функцией разности  $(t_2 - t_1)$ . Процессы, удовлетворяющие этим двум условиям, называются *стационарными в широком смысле*. В дальнейшем термин “стационарный” при отсутствии оговорок будет применяться по отношению именно к такому процессу.

Очень часто на практике приходится иметь дело с, так называемым, эргодическим процессом. *Эргодическим* процессом называется стационарный процесс, если каждый член ансамбля ведет себя в статистическом смысле, как и весь ансамбль.

Для эргодических процессов математические ожидания и моменты могут быть определены как усреднением по времени, так и усреднением по ансамблю реализаций. В частности, *n*-й момент определяется как

$$\overline{X^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/2T) \int_{-T}^T X^n(t) dt. \quad (4.1.7)$$

Для эргодичности случайного процесса, он должен быть строго стационарным. При этом не все строго стационарные процессы являются эргодическими.

Важное значение для описания процессов с дискретизированным временем имеет *теорема Котельникова*. Рассмотрим сначала процесс, определяемый детерминированной функцией  $f(t)$ . Ее спектр (преобразование Фурье)  $F(\omega)$  будем считать непрерывным и ограниченным полосой частот  $(-\Delta, \Delta)$ ; при частотах  $\omega \geq \Delta$  будем полагать, что  $F(\omega) = 0$ . Тем самым, справедливо выражение

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.1.8)$$

Функция  $F(\omega)$  представима рядом Фурье на интервале  $(-\Omega, \Omega)$  при условии, что  $\Omega \gg \Delta$ :

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{2\pi i n}{2\Omega} \omega}, \quad (4.1.9)$$

где

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) e^{\frac{2\pi i n}{2\Omega} \omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Delta}^{\Delta} F(\omega) e^{\frac{2\pi i n}{2\Omega} \omega} d\omega = \frac{2\pi}{2\Omega} f\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right). \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Ряд в правой части выражения (9) является периодической функцией частоты с периодом  $2\Omega$ , которая совпадает с  $F(\omega)$  лишь на основном интервале  $(-\Omega, \Omega)$  и не совпадает на остальных  $(\pm k\Omega, (k+1)\Omega)$ ,  $k \geq 1$ . Подставляя (9) в (8) и учитывая (10), получим

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi n}{\Omega}\right) \frac{\sin\left[\Omega\left(t - \frac{\pi n}{\Omega}\right)\right]}{\Omega\left(t - \frac{\pi n}{\Omega}\right)}, \quad \Omega \geq \Delta. \quad (4.1.11)$$

Выражение (11) представляет интерполяционную формулу, при помощи которой можно по отсчетам функции  $f$  в дискретные моменты времени с частотой  $2\Omega \geq 2\Delta$  восстановить точно все значения  $f(t)$  на оси времени от  $-\infty$  до  $\infty$ .

При минимально возможной частоте отбора  $2\Omega = 2\Delta$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi n}{\Delta}\right) \frac{\sin\left[\Delta\left(t - \frac{\pi n}{\Delta}\right)\right]}{\Delta\left(t - \frac{\pi n}{\Delta}\right)}. \quad (4.1.12)$$

Формула (12) – суть *теоремы В.А. Котельникова*, согласно которой детерминированная функция  $f(t)$ , имеющая ограниченный спектр, полностью определяется своими дискретными значениями в точках, расположенных на расстоянии  $2\pi/2\Delta$  друг относительно друга, где  $\Delta$  – максимальная частота (циклическая) в спектре функции  $f(t)$ .

Теорема Котельникова может быть распространена на случайные процессы. Пусть  $X(t)$  – непрерывный и стационарный в широком смысле случайный процесс, энергетический спектр которого  $F_X(\omega)$  непрерывный и равный нулю вне полосы частот  $|\omega| < \Delta$ . Тогда формула (12) может быть обобщена на случайные процессы путем замены функции  $f(t)$  на

$F(t)$ . Иными словами, случайный процесс полностью определяется счетным множеством случайных величин

$$x_n = X\left(\frac{\pi n}{\Delta}\right), \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (4.1.13)$$

## 4.2. Измерение параметров случайных процессов

К статистическим параметрам случайного процесса  $X(t)$  принято относить ряд характеристик (таких, как математическое ожидание, средний квадрат, дисперсия), связанных со случайными величинами  $X(t)$ , рассматриваемыми в различные моменты времени  $t$ . Естественно, для стационарного случайного процесса целесообразно рассматривать только одну группу параметров.

В практическом отношении важной является задача определения характеристик случайного процесса по одной реализации (так как часто в распоряжении имеется лишь она одна, притом конечной длительности). Ясно, что по одному эксперименту невозможно осуществить усреднение по ансамблю для оценки параметров, поэтому единственной альтернативой является осуществление усреднения по времени. Для эргодического случайного процесса такой подход заслуживает рассмотрения, так как временное усреднение (на интервале бесконечной длительности) эквивалентно усреднению по ансамблю. Разумеется, в большинстве случаев трудно доказать, что случайный процесс является эргодическим; обычно требуется предположить, что он эргодичен, если только нет явных физических причин, исключающих справедливость такого допущения. Кроме того, не представляется возможным реализовать временное усреднение в пре-

делах интервала бесконечной длительности, а усреднение на интервале конечной продолжительности приведет к приближенным результатам. Рассмотрим, насколько точным является это приближение, и от каких причин зависит его качество?

Сначала рассмотрим задачу оценки математического ожидания  $\widehat{X}$  эргодического случайного процесса  $\{x(t)\}$  путем усреднения по времени на конечном интервале на основе выражения

$$\widehat{X} = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt. \quad (4.2.1)$$

Необходимо отметить, что  $\widehat{X}$  – случайная величина, так как мы получили бы другое число, если бы использовался иной временной интервал или наблюдалась не такая временная реализация. Таким образом,  $\widehat{X}$  не будет тождественно равно истинному математическому ожиданию. Вопрос о том, насколько они близки, требует дополнительного анализа.

Будем исходить из того, что  $\widehat{X}$  – хорошая оценка  $\overline{X}$ , если математическое ожидание величины  $\widehat{X}$  будет равно  $\overline{X}$ , а ее дисперсия окажется малой. В соответствии с (1) математическое ожидание величины  $\widehat{X}$  равно

$$\begin{aligned} E[\widehat{X}] &= E\left[\frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt\right] = \frac{1}{T} \int_0^T E[X(t)] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \overline{X}(t) dt = \frac{1}{T} [\overline{Xt}]_0^T = \overline{X}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Из (2) следует, что  $\widehat{X}$  имеет математическое ожидание, равное истинному. Оценка дисперсии случайной величины  $\widehat{X}$  оказывается значительно более трудоемкой и требует знания автокорреляционных функций, что является предметом рассмотрения следующей главы. Однако дисперсию таких оценок несложно проанализировать для процесса с дискретным временем. (Это соответствует случаю обработки оцифрованного сигнала с заданным уровнем дискретизации.)

С практической точки зрения, операция интегрирования в выражении (1) в редких случаях может быть выполнена аналитически, поскольку  $X(t)$  не представима явно. Альтернативой является численное интегрирование выборок случайного процесса  $X(t)$ , наблюдаемых через равноотстоящие промежутки времени. Таким образом, если  $X_1 = X(\Delta t)$ ,  $X_2 = X(2\Delta t)$ , ...,  $X_N = X(N\Delta t)$ , то оценка случайной величины  $\overline{X}$  может быть представлена в виде формулы

$$\widehat{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i, \quad (4.2.3)$$

являющейся дискретным аналогом соотношения (1).

Оценка  $\widehat{X}$  по-прежнему является случайной величиной и имеет математическое ожидание

$$\begin{aligned} E[\widehat{X}] &= E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[X_i] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overline{X} = \overline{X}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Видим, что оценка и в этом случае имеет математическое ожидание, равное его истинному значению.

Для оценки дисперсии случайной величины  $\widehat{X}$  полагают, что анализируемые выборки следуют во времени на достаточно длительных интервалах и поэтому статистически независимы. Средний квадрат  $\widehat{X}$  может быть записан в виде

$$\begin{aligned} E\left[\left(\widehat{X}\right)^2\right] &= E\left[\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^NX_iX_j\right] = \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^NE[X_iX_j], \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

где двойное суммирование обусловлено произведением двух сумм. Так как выборки статистически независимы, то

$$E[X_iX_j] = \begin{cases} \overline{X^2}, & i = j, \\ (\overline{X})^2, & i \neq j. \end{cases}$$

Таким образом, получим

$$E\left[\left(\widehat{X}\right)^2\right] = (1/N^2)\left[N\overline{X^2} + (N^2 - N)(\overline{X})^2\right]. \quad (4.2.6)$$

Этот результат является следствием того, что двойная сумма в (5) содержит в совокупности  $N^2$  членов, но только  $N$  из них соответствуют случаю  $i = j$ . Уравнение (6) представимо в виде

$$\begin{aligned} E\left[\left(\widehat{X}\right)^2\right] &= (1/N)\overline{X^2} + [1 - (1/N)](\overline{X})^2 = \\ &= (1/N)\sigma_x^2 + (\overline{X})^2. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Последнее выражение позволяет определить дисперсию случайной величины  $\widehat{\bar{X}}$ :

$$\begin{aligned} D(\widehat{\bar{X}}) &= E\left[\left(\widehat{\bar{X}}\right)^2\right] - \left\{E\left[\widehat{\bar{X}}\right]\right\}^2 = \\ &= (1/N)\sigma_x^2 + (\bar{X})^2 - (\bar{X})^2 = (1/N)\sigma_x^2. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Видно, что дисперсия оказывается в  $N$  раз меньше дисперсии случайного процесса. Тем самым по мере увеличения протяженности выборки дисперсия стремится к нулю.

### 4.3. Корреляционная и структурная функции

При статистической обработке измерений случайных величин широко используется понятие корреляционных функций. При анализе сигналов ее аргументом является интервал между двумя случайными величинами.

Если эти величины являются выборочными значениями одного и того же случайного процесса, то указанная функция называется *автокорреляционной* (или просто *корреляционной*) *функцией* данного процесса, если же они принадлежат различным случайным процессам – *взаимной корреляционной функцией*. Сначала рассмотрим автокорреляционные функции.

Пусть  $X(t)$  – некоторый случайный процесс, а случайные величины определяются как

$$X_1 = X(t_1), \quad X_2 = X(t_2),$$

тогда, по определению, автокорреляционная функция есть

$$R_X(t_1, t_2) = E[X_1 X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2) dx_2, \quad (4.3.1)$$

где  $f(x_1, x_2)$  – двумерная плотность распределения вероятностей.

Это определение справедливо как для стационарных, так и для нестационарных процессов. Однако для стационарных процессов выражение (1) можно упростить. Т.к. для него в широком смысле любое усреднение по ансамблю не зависит от начала отсчета времени, и автокорреляционная функция может быть записана в виде

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1 + T, t_2 + T) = \\ &= E[X_1(t_1 + T)X_2(t_2 + T)] \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Поскольку выбор начала отсчета времени произвольный, положив  $T = -t_1$ , получаем

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(0, t_2 - t_1) = E[X(0)X(t_2 - t_1)]. \quad (4.3.3)$$

Очевидно, что это выражение зависит только от промежутка времени  $t_2 - t_1$ . Вводя обозначение  $\tau = t_2 - t_1$  и опуская нуль в аргументе  $R_X(0, t_2 - t_1)$ , (1) перепишем как

$$R_X(\tau) = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)]. \quad (4.3.4)$$

Это выражение для автокорреляционной функции стационарного случайного процесса. Оно зависит только от  $\tau$  и не зависит от значения  $t_1$ , поэтому индекс в выражении (4) обычно опускают и рассматриваемую зависимость представляют в виде  $R_X(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)]$ .

Часто используется *временная автокорреляционная* функция для отдельной реализации  $x(t)$ , определяемая как

$$\mathfrak{R}_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau)dt = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle. \quad (4.3.5)$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по времени. Для эргодического процесса,  $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle$  является неизменной функцией для любой реализации  $x(t)$  и равной  $R_x(\tau)$ , т.е. для эргодического процесса

$$\mathfrak{R}_x(\tau) = R_x(\tau). \quad (4.3.6)$$

Предположение об эргодичности, если оно не оказывается явно неправомерным, часто упрощает расчет корреляционных функций.

Из (4) непосредственно следует, что при  $\tau = 0$  в силу  $R_x(0) = E[X(t_1)X(t_1)]$  автокорреляционная функция равна среднему квадрату случайного процесса. При  $\tau \neq 0$  автокорреляционная функция  $R_x(\tau)$  может рассматриваться как мера подобия случайных процессов  $X(t)$  и  $X(t+\tau)$ . Проиллюстрируем данное утверждение применительно к выборочной функции центрированного стационарного случайного процесса  $X(t)$  путем введения функции

$$Y(t) = X(t) - \rho X(t+\tau). \quad (4.3.7)$$

Определим такую величину  $\rho$ , которая минимизирует средний квадрат процесса  $Y(t)$ . (Это позволит получить меру подобия случайных процессов  $X(t+\tau)$  и  $X(t)$ .) Вычислить ее можно путем расчета дисперсии случайного процесса  $Y(t)$ , приравняв производную дисперсии по  $\rho$  нулю и решив относительно  $\rho$  полученное уравнение:

$$E[Y(t)^2] = E[X(t) - \rho X(t + \tau)]^2 = E[X^2(t) - 2\rho X(t)X(t + \tau) + \rho^2 X^2(t + \tau)] \quad (4.3.8)$$

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 - 2\rho R_X(\tau) + \rho^2 \sigma_X^2,$$

$$\frac{d\sigma_Y^2}{d\rho} = -2R_X(\tau) + 2\rho^2 \sigma_X^2 = 0,$$

$$\rho = \frac{R_X(\tau)}{\sigma_X^2}.$$

Видно, что  $\rho$  прямо пропорционально  $R_X(\tau)$ . Коэффициент  $\rho$  называется *коэффициентом корреляции*. Он является показателем того, насколько сохраняется форма случайного процесса  $X(t)$  в среднем по ансамблю и не относится к отдельно взятой выборке (реализации)  $X(t)$ , что очень важно. Коэффициент корреляции может принимать значения от  $+1$  до  $-1$ . Равенство  $\rho = 1$  указывает, что формы выборочных функций  $x(t)$  случайного процесса  $X(t)$  идентичны, т.е. полностью коррелированы. При  $\rho = 0$  выборочные функции некоррелированы, т.е. не существует какого-либо фрагмента выборки случайного процесса  $X(t + \tau)$ , который являлся бы частью выборки процесса  $X(t)$ . Значение  $\rho = -1$  свидетельствует об идентичности форм выборок и противоположности их знаков, а именно: форма выборки процесса  $X(t + \tau)$  является зеркальным отражением формы выборочной функции процесса  $X(t)$ .

Поскольку  $R_X(\tau)$  зависит от коэффициента корреляции  $\rho$  и дисперсии  $\sigma_X^2$  случайного процесса  $X(t)$ ,

конкретный вид функции  $R_X(\tau)$  невозможно определить без знания одной из этих величин. Например, если случайный процесс имеет нулевое математическое ожидание и положительную автокорреляционную функцию, то о случайных величинах  $X(t_1)$  и  $X(t_1 + \tau)$  можно сказать лишь то, что у них, вероятно, одинаковые знаки. Если автокорреляционная функция отрицательна, то указанные выше случайные величины вероятно имеют противоположные знаки. Если же она близка к нулю, эти случайные величины могут иметь как противоположные, так и одинаковые знаки.

При описании случайных процессов наряду с корреляционными функциями часто используются *структурные функции*. Рассмотрим структурную функцию некоторого стационарного процесса:

$$\begin{aligned} D_X(\tau) &= \overline{(x - x_\tau)^2} = \\ &= \overline{x^2} - 2\overline{xx_\tau} + \overline{x_\tau^2} = \\ &= \sigma^2 - 2R_X(\tau) + \sigma^2 = 2(\sigma^2 - R_X(\tau)). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Это выражение дает связь между корреляционной и структурной функциями и показывает, что для стационарного процесса возможно использование как той, так и другой. При этом надо учитывать, что

$$R_X(0) = \sigma^2, \quad (4.3.10)$$

и

$$D_X(\infty) = 2\sigma^2. \quad (4.3.11)$$

Графически характерные зависимости структурной и корреляционной функций от величины сдвига изображены на *рис. 4.3.1*.

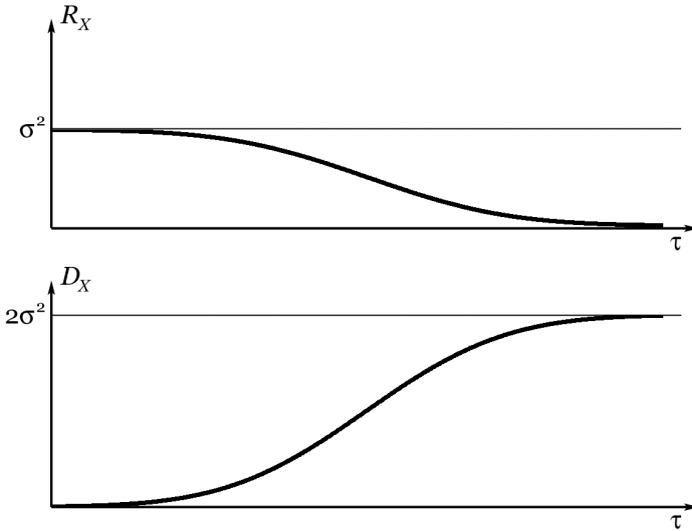


Рис. 4.3.1. Взаимный ход автокорреляционной и структурной функций.

#### 4.4. Свойства автокорреляционных функций

Рассмотрим свойства автокорреляционной функции, сопоставив их со свойствами представляемого ею случайного процесса, который будем считать стационарным и эргодическим. Перечислим в конспективной форме основные свойства.

1.  $R_X(0) = \overline{X^2}$ . Это означает, что средний квадрат случайного процесса  $X(t)$  можно найти, приравняв его к автокорреляционной функции при  $\tau = 0$ .

Указанное свойство не зависит от равенства нулю математического ожидания. Если математическое ожидание  $\bar{X}$  равно нулю, то средний квадрат равен дисперсии этого процесса.

2.  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ . Автокорреляционная функция является четной относительно  $\tau$ .

Свойство симметрии очень полезно при вычислении автокорреляционной функции случайного процесса, поскольку оно означает, что расчеты можно произвести только для положительных  $\tau$ , а результат для отрицательных  $\tau$  определить на основании этого свойства. Для нестационарного процесса симметрия справедлива не всегда.

3.  $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ . Наибольшее значение автокорреляционная функция, как правило, принимает при  $\tau = 0$ . Однако в некоторых случаях могут существовать иные  $\tau$ , для которых эта функция имеет такое же значение (например, для периодической функции  $X(t)$ ), но и для них  $R_X(\tau)$  не может быть больше  $R_X(0)$ .

4. Если  $X(t)$  содержит постоянную составляющую или имеет ненулевое математическое ожидание, то функция  $R_X(\tau)$  также будет иметь постоянную составляющую. Например, если  $X(t) = A$ , то

$$R_X(\tau) = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = E[AA] = A^2. \quad (4.4.1)$$

Предположим теперь, что функция  $X(t)$  представляет собой сумму ее математического ожидания  $\bar{X}$  и составляющей  $N(t)$  с нулевым математическим ожиданием так, что  $X(t) = \bar{X} + N(t)$ , тогда

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E\left[\left[\bar{X} + N(t_1)\right]\left[\bar{X} + N(t_1 + \tau)\right]\right] = \\ &= E\left[\bar{X}^2 + \bar{X}N(t_1) + \bar{X}N(t_1 + \tau) + N(t_1)N(t_1 + \tau)\right] = \\ &= (\bar{X})^2 + R_N(\tau), \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

так как по условию  $E[N(t_1)] = E[N(t_1 + \tau)] = 0$ . Таким образом, и в этом случае  $R_X(\tau)$  содержит постоянную составляющую, равную квадрату математического ожидания  $(\overline{X})^2$  процесса  $X(t)$ .

При рассмотрении эргодического случайного процесса значение математического ожидания может быть определено по автокорреляционной функции при  $\tau$ , стремящемся к бесконечности, и при условии, что любыми периодическими составляющими автокорреляционной функции в пределе можно пренебречь. Поскольку в результате таких вычислений получается только квадрат математического ожидания  $\overline{X}$ , определение его знака не представляется возможным.

5. Если  $X(t)$  – периодический процесс, то  $R_X(\tau)$  также будет периодической функцией с тем же периодом.

Это свойство автокорреляционных функций может быть распространено на случайные процессы, содержащие любое количество периодических составляющих. Если каждая реализация  $x(t)$  случайного процесса  $X(t)$  является периодической функцией и представима рядом Фурье, результирующая автокорреляционная функция также будет периодична и представима рядом Фурье.

6. Если  $X(t)$  – центрированный эргодический случайный процесс, не содержащий периодических составляющих, то

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_X(\tau) = 0. \quad (4.4.3)$$

При больших  $\tau$  в силу того, что влияние значений этого процесса, имевших место в прошлом, уменьша-

ются во времени, случайные величины  $X(t)$  и  $X(t + \tau)$  становятся статистически независимыми.

7. Форма автокорреляционных функций не может быть произвольной. Один из возможных способов определения их формы заключается в расчете преобразования Фурье

$$\mathfrak{Z}[R_X(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp[-j\omega\tau] d\tau. \quad (4.4.4)$$

при  $\mathfrak{Z}[R_X(\tau)] \geq 0$  для всех  $\omega$ .

Смысл ограничения станет, очевидным после рассмотрения спектральной плотности в п. 4.5. Кроме всего прочего, это ограничение отрицает возможность существования автокорреляционных функций с плоскими вершинами, вертикальными боковыми сторонами или какими-либо разрывами в их графических изображениях.

Завершая анализ свойств автокорреляционных функций, выделим еще один важный аспект их теории. Хотя, согласно (4.3.1), знание совместной плотности распределения вероятностей  $f(x_1, x_2)$  случайного процесса  $X(t)$  является достаточным для однозначного определения автокорреляционной функции  $R_X(t_1, t_2)$ , обратное утверждение не является справедливым. Может существовать множество различных случайных процессов с одинаковыми автокорреляционными функциями. Таким образом, знание корреляционной функции случайного процесса не эквивалентно знанию плотности распределения вероятностей и является значительно менее информативным, чем знание совместной функции распределения.

### 4.5. Измерение автокорреляционных функций

Поскольку автокорреляционная функция играет важную роль в анализе стохастических сигналов, рассмотрим вопрос о практических подходах к ее определению. Обычно она не может быть вычислена, исходя из совместных плотностей распределения вероятностей, так как они редко бывают известны. Усреднение по ансамблю также невозможно, поскольку обычно приходится иметь дело лишь с одной реализацией. Поэтому чаще всего единственно возможной операцией является расчет временной автокорреляционной функции на ограниченном интервале в предположении, что случайный процесс – эргодический.

Предположим, что какой-то случайный сигнал, характеризующий процесс  $X(t)$ , наблюдается в течение интервала времени от 0 до  $T$  в виде напряжения или тока  $x(t)$ . При этом целесообразно ввести понятие *приближенной (оценочной) корреляционной функции*:

$$\hat{R}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)dt \quad \text{при } 0 \leq \tau \ll T. \quad (4.5.1)$$

По всему ансамблю возможных реализаций  $x(t)$  эта приближенная функция является случайной. Обратите внимание, что время усреднения равно  $T-\tau$ , а не  $T$ , потому что интервал (выборочная функция) охватывает только часть наблюдаемых данных, включающих как  $x(t)$ , так и  $x(t+\tau)$ .

Выполнить интегрирование в выражении (1), как правило, невозможно, поскольку математическое выражение для  $x(t)$  не известно. Однако интеграл можно аппроксимировать суммой выборок из непрерывной временной функции в отдельный момент, т.е. перейти к случаю дискретного времени. На практике это озна-

чает, что обрабатывается оцифрованный сигнал с интервалом дискретизации, который мы положим равным  $\Delta t$ . Таким образом, если выборки из какой-либо реализации  $x(t)$  случайного процесса  $X(t)$  соответствуют моментам времени  $0, \Delta t, 2\Delta t, N\Delta t$  и если их значения  $x(t)$  равны  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ , то дискретное представление выражения (1) будет иметь вид

$$\widehat{R}_X(n\Delta t) = \frac{1}{N-n+1} \sum_{k=0}^{N-n} X_k X_{k+n}, \quad (4.5.2)$$

при  $n = 0, 1, \dots, M$  и  $M \ll N$ .

Эта приближенная (оценочная) функция по всему ансамблю возможных выборок  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$  также является случайной величиной и обозначается  $\widehat{R}_X(n\Delta t)$ . Даже если значение  $N$  весьма велико (обычно порядка нескольких тысяч), операцию (2) несложно выполнить с помощью компьютера.

Для оценки качества приближения, задаваемого формулой (2), необходимо определить математическое ожидание и дисперсию функции  $\widehat{R}_X(n\Delta t)$ , поскольку она является случайной, а ее точное значение зависит от конкретной рассматриваемой реализации и соответствующего ей набора выборок. Математическое ожидание вычисляется легко, так как

$$\begin{aligned} E\left[\widehat{R}_X(n\Delta t)\right] &= E\left[\frac{1}{N-n+1} \sum_{k=0}^{N-n} X_k X_{k+n}\right] = \\ &= \frac{1}{N-n+1} \sum_{k=0}^{N-n} E[X_k X_{k+n}] = \\ &= \frac{1}{N-n+1} \sum_{k=0}^{N-n} R_X(n\Delta t) = R_X(n\Delta t). \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Таким образом, математическое ожидание этого приближения совпадает с точными значениями автокорреляционной функции и является ее несмещенной оценкой.

Труднее определить дисперсию такого приближения, детали вычислений выходят за рамки нашего рассмотрения. Опуская подробные выкладки, отметим, что эта дисперсия должна удовлетворять условию

$$D\left[\widehat{R}_X(n\Delta t)\right] \leq \frac{2}{N} \sum_{k=-M}^M R_X^2(k\Delta t). \quad (4.5.4)$$

В этом выражении подразумевается, что  $2M+1$  приблизительно (оценочных) значений автокорреляционной функции перекрывают область, в которой эта функция имеет достаточно большую амплитуду. Если произведение  $(M+1)\Delta t$  мало, то дисперсия, определяемая выражением (4), может также быть незначительной. Отметим, что более точная дисперсия приближенного значения имеет вид

$$D\left[\widehat{R}_X(n\Delta t)\right] \leq \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R_X^2(\tau) d\tau, \quad (4.5.7)$$

где  $T = N\Delta t$  – длительность наблюдаемой реализации (выборки).

#### 4.6. Взаимные корреляционные функции

Часто возникает необходимость определить корреляцию между двумя случайными величинами, принадлежащими к различным процессам. Если два случайных процесса  $X(t)$  и  $Y(t)$  совместно стационарны в широком смысле, то для случайных величин

$$X_1 = X(t_1), \quad Y_2 = Y(t_1 + \tau)$$

можно определить взаимную корреляционную функцию

$$R_{XY}(\tau) = E[X_1 Y_2] = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 f(x_1, y_2) dy_2. \quad (4.6.1)$$

Существует еще один вид взаимной корреляционной функции, которую можно определить для тех же двух моментов времени. Для случайных величин  $Y_1 = Y(t_1)$ ,  $X_2 = X(t_1 + \tau)$  она имеет вид

$$R_{YX}(\tau) = E[Y_1 X_2] = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} y_1 x_2 f(y_1, x_2) dx_2. \quad (4.6.2)$$

Поскольку оба случайных процесса  $X(t)$  и  $Y(t)$  являются совместно стационарными, приведенные взаимные корреляционные функции зависят только от временного интервала  $\tau$ . Для стационарных случайных процессов, не обладающих свойством совместной стационарности, указанная зависимость не наблюдается.

*Временные взаимные корреляционные функции* для пары реализаций  $x(t)$  и  $y(t)$  случайных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  могут быть определены так же, как и выше, а именно

$$\mathfrak{R}_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt, \quad (4.6.3)$$

$$\mathfrak{R}_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)x(t+\tau) dt. \quad (4.6.4)$$

Если случайные процессы являются совместно эргодическими, то выражения (3) и (4) дают одинаковые значения для каждой пары реализации. Таким образом, для эргодических процессов имеем

$$\Re_{xy}(\tau) = R_{XY}(\tau), \quad (4.6.5)$$

$$\Re_{yx}(\tau) = R_{YX}(\tau). \quad (4.6.6)$$

Основные свойства взаимных корреляционных функций весьма существенно отличаются от свойств автокорреляционных функций.

1. Значения  $R_{XY}(0)$  и  $R_{YX}(0)$  не имеют никакого реального физического смысла и не соответствуют средним квадратам случайных величин  $X = X(t)$  и  $Y = Y(t)$ . Тем не менее, равенство  $R_{XY}(0) = R_{YX}(0)$  справедливо.

2. В общем случае взаимные корреляционные функции не являются четными относительно  $\tau$ . Тем не менее, существует вид симметрии, описываемый соотношением

$$R_{YX}(\tau) = R_{XY}(-\tau). \quad (4.6.7)$$

Это свойство объясняется тем, что сдвиг  $Y(t)$  во времени в определенном направлении эквивалентен сдвигу  $X(t)$  в противоположном направлении.

3. Взаимная корреляционная функция необязательно должна иметь максимум при  $\tau = 0$ . Тем не менее, можно показать, что

$$|R_{XY}(\tau)| \leq [R_X(0)R_Y(0)]^{1/2}. \quad (4.6.8)$$

Аналогичное соотношение справедливо и для  $R_{YX}(\tau)$ . Максимум взаимной корреляционной функции может оказаться при каком угодно  $\tau$ , но не может превысить значения (8). Более того, он может не достигаться ни при каких  $\tau$ .

Свойства автокорреляционных и взаимных корреляционных функций часто используются в оптических

исследованиях. Некоторые примеры такого использования приведены в *приложениях 7 и 8*.

#### 4.7. Энергетический спектр стационарного случайного процесса

Рассмотрим возможность применения гармонического анализа к изучению свойств стохастических процессов. Сразу отметим, что непосредственное применение классического гармонического анализа к случайным процессам невозможно, так как спектральные плотности, рассчитанные по спектрам Фурье их реализаций, не имеют конечных значений при любых частотах. В прочем, можно обобщить гармонический анализ, усредняя спектральные разложения, полученные из отдельных выборок.

Рассмотрим одну реализацию  $X^k(t)$  случайного процесса  $X(t)$ . Пусть, кроме того,  $X_T^{(k)}(t)$  – усеченная реализация, равная нулю вне интервала  $|t| \leq \frac{T}{2}$  и совпадающая с  $X^k(t)$  внутри этого интервала. Спектр (преобразование Фурье) функции  $X_T^{(k)}(t)$  имеет вид

$$Z_T^{(k)}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} X_T^{(k)}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.7.1)$$

Средняя мощность на частоте  $\omega$ , отнесенная к полосе  $\Delta f = 1/T$ , равна

$$\begin{aligned} G_T^{(k)}(\omega) &= \frac{2}{T} \left| Z_T^{(k)}(\omega) \right|^2 = \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} X_T^{(k)}(t_1) X_T^{(k)}(t_2) e^{-i\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

При  $T \rightarrow \infty$   $G_T(\omega)$  не стремится, вообще говоря, к определенному пределу, и является случайной функцией. Среднее по множеству реализаций для  $G_T(\omega)$  равно

$$F_T(\omega) = m_1 \{G_T(\omega)\} = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} m_1 \{X_T(t_1)X_T(t_2)\} e^{-i\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2. \quad (4.7.3)$$

Символ  $m_1$  обозначает усреднение по ансамблю реализаций.

Вводя корреляционную функцию  $R(t_1, t_2)$  процесса  $X(t)$ , можно  $F_T(\omega)$  представить в виде

$$F_T(\omega) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} R(t_1, t_2) e^{-i\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2. \quad (4.7.4)$$

Если случайный процесс  $X(t)$  стационарный в широком смысле, то  $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$  и, следовательно,

$$F_T(\omega) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} R(t_2 - t_1) e^{-i\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2. \quad (4.7.4)$$

Вводя переменную  $\tau = t_1 - t_2$ , последнее выражение можно преобразовать к виду

$$F_T(\omega) = 2 \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.7.5)$$

Предел  $F_T(\omega)$  при  $T \rightarrow \infty$  равен

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} F_T(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.7.6)$$

Функцию частоты  $F(\omega)$ , т.е. предел при  $T \rightarrow \infty$  усредненной по множеству реализаций спектральной плотности средней мощности процесса, называют *энергетическим спектром* стационарного случайного процесса. Он дает только усредненную картину распределения энергии процесса по частотам элементарных гармонических составляющих, но не учитывает их фазовой структуры.

Из (6) следует также, что энергетический спектр  $F(\omega)$  и корреляционная функция  $R(\tau)$  стационарного случайного процесса связаны друг с другом парой преобразований Фурье (*теорема Винера-Хинчина*):

$$F(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (4.7.7)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (4.7.8)$$

Так как  $G_T(\omega)$  и  $F_T(\omega) = m_1 \{G_T(\omega)\}$  неотрицательны, то и энергетический спектр  $F(\omega)$  является неотрицательной функцией частоты. Кроме того, как следует из (7),  $F(\omega)$  – четная функция. Заметим, что в формуле (8) при использовании преобразования Фурье в показательной форме понятие спектрального распределения средней мощности процесса распространялось на все действительные частоты от  $\omega = -\infty$  до  $\omega = +\infty$ . Физический смысл имеют только положительные  $\omega \geq 0$ . Для использования показательной формы интеграла Фурье, каждая спектральная компонента разбивается на две равные по интенсивности  $1/2 F(\omega)$  и  $1/2 F(-\omega)$ , из-за чего общий энергетический спектр

$F(\omega)$ , распространенный на отрицательные частоты, становится четной функцией частоты.

Преобразование Фурье возможно только для абсолютно интегрируемой функции, поэтому формулы (7) и (8) справедливы, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau \leq M, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| d\omega \leq N. \quad (4.7.9)$$

где  $M$  и  $N$  – постоянные величины. Это условие ограничивает применимость теоремы Винера-Хинчина исключительно стационарными процессами, среднее значение которых равно нулю. Если это условие выполнено, то энергетический спектр  $F(\omega)$  стационарного случайного процесса – непрерывная функция частоты  $\omega$ .

Из (8) следует, что при  $\tau = 0$

$$R(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega, \quad (4.7.10)$$

т.е. средняя мощность стационарного процесса равна площади его энергетического спектра. Спектральная плотность средней мощности при  $\omega = 0$

$$F(0) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau \quad (4.7.11)$$

равна удвоенной площади под графиком корреляционной функции. Если  $R(\tau)$  – неотрицательная, то  $F(0)$  пропорциональна *времени корреляции* процесса

$$\tau_0 = F(0)/4R(0). \quad (4.7.12)$$

Величину площади под кривой энергетического спектра, отнесенную к спектральной плотности на не-

которой характерной частоте  $\omega_0$ , называют *шириной полосы энергетического спектра*

$$\Delta_{\Pi} = \frac{1}{2\pi F(\omega_0)} \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega = \frac{R(0)}{F(\omega_0)}. \quad (4.7.13)$$

Ее можно интерпретировать как ширину равномерного в полосе  $\Delta_{\Pi}$  энергетического спектра процесса, эквивалентного данному по средней мощности.

Корреляционная функция  $R(\tau)$  и энергетический спектр  $F(\omega)$  стационарного случайного процесса, как пара преобразования Фурье, обладают всеми присущими этому преобразованию свойствами. В частности, чем шире спектр  $F(\omega)$ , тем уже корреляционная функция  $R(\tau)$ , и наоборот.

Если случайный процесс эргодический, то вместо корреляционной функции можно использовать временную корреляционную функцию любой его реализации и, таким образом, находить энергетический спектр по его единственной реализации.

#### 4.8. Марковский и винеровский процессы

Пусть в каждый момент времени некоторая система может находиться в одном из состояний  $E_1, E_2, \dots$  (число состояний конечно или счетно). Если система случайно переходит из одного состояния, например  $E_i$ , в другое, скажем  $E_j$ , то говорят, что в системе происходит случайный процесс. Если при этом вероятность перехода из состояния  $E_i$  в  $E_j$  зависит только от  $E_i$ , и не зависит от того, когда и как система пришла в это состояние, то случайный процесс  $X(t)$  называют *марковским*. Другими словами, если для ка-

ждого момента времени  $t_0$  протекание случайного процесса  $X(t)$  в будущем (при  $t > t_0$ ) определяется его настоящим (значением  $X(t_0)$ ) и от прошлого (от  $X(t)$  при  $t < t_0$ ) не зависит, то  $X(t)$  – *марковский случайный процесс*.

Исчерпывающей вероятностной характеристикой марковского процесса является условная интегральная функция распределения  $F_2(y, t | x_0, t_0)$ , представляющая вероятность того, что  $X(t) < y$ , если при  $t_0 < t$  имело место равенство  $X(t_0) = x_0$ . Иначе говоря, если известно значение  $x_0$  марковского процесса в момент времени  $t_0$ , то вероятностные свойства процесса при  $t > t_0$  уже не зависят от того, что происходило до момента  $t_0$ . Производная

$$f_2(y, t | x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial y} F_2(y, t | x_0, t_0) \quad (4.8.1)$$

характеризует условную плотность распределения вероятностей.

Для стационарного марковского процесса

$$f_2(y, t | x_0, t_0) = f_2(y, \tau | x_0), \quad (4.8.2)$$

где  $\tau = t - t_0$ .

Частным случаем марковского процесса является винеровский процесс. Он описывает *броуновское движение* – движение погруженной в жидкость маленькой частицы под влиянием ударов молекул жидкости. Это явление называется по имени английского ботаника Р. Броуна, который в 1827 г. открыл явление, но не объяснил его. Лишь в 1905 г. А. Эйнштейн описал броуновское движение математически. Начиная с

---

1918 г., американский ученый Н. Винер строит математическую модель, более точно его описывающую. По этой причине процесс броуновского движения называют винеровским процессом.

Прежде чем перейти к винеровскому процессу, введем предварительно понятия нормального процесса и процесса с независимыми приращениями.

Случайный процесс  $X(t)$  называют *нормальным*, (*гауссовым*), если совместное распределение  $X(t_1)$ ,  $X(t_2)$ , ...,  $X(t_k)$  является нормальным для каждого  $k$  и всех  $t_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ). Нормальный процесс полностью определяется двумя характеристиками: математическим ожиданием и корреляционной функцией.

Случайный процесс  $X(t)$  называют *процессом с независимыми приращениями*, если его приращения на неперекрывающихся интервалах взаимно независимы, т.е. случайные величины  $X(t_2) - X(t_1)$ ,  $X(t_3) - X(t_2)$ , ...,  $X(t_k) - X(t_{k-1})$  для  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$  взаимно независимы. Этот процесс определяется распределением приращений  $X(t) - X(s)$  для произвольных  $t$  и  $s$ . Если  $X(t) - X(s)$  зависит только от разности  $t - s$ , то процесс называют *процессом со стационарными приращениями*.

*Винеровским процессом* (*процессом броуновского движения*) называют нормальный случайный процесс  $X(t)$  с независимыми стационарными приращениями, для которого  $X(0) = 0$ ,  $M[X(t)] = 0$ ,  $M[X(t)^2] = \sigma^2 t$  для всех  $t > 0$ .

Важное значение винеровского процесса состоит в том, что он используется при изучении многих других.

### 4.9. Белый шум

Рассмотрим теперь энергетический спектр случайного процесса, имеющего очень широкую полосу. Пусть спектральная плотность  $F(\omega)$  средней мощности процесса сохраняет постоянное значение до очень высоких частот. Его корреляционная функция  $R(\tau)$  будет отлична от нуля только в очень небольшом интервале значений своего аргумента около начала координат, т.е. при малых  $\tau$ . Энергетический спектр

$$F(\omega) = 2N_0 = const, \quad (4.9.1)$$

равномерный на всех частотах, является полезной математической идеализацией спектров указанного типа.

Случайный процесс, имеющий равномерный на всех частотах спектр, называют «белым шумом». Его корреляционная функция равна

$$R(\tau) = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = N_0 \delta(\tau), \quad (4.9.2)$$

т.е. представляет собой дельта-функцию в начале координат.

Коэффициент корреляции для белого шума

$$\rho(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0, \\ 0, & \tau \neq 0. \end{cases} \quad (4.9.3)$$

Таким образом, он характеризуется тем, что его значения в любые два даже сколь угодно близкие момента времени некоррелированы. Следует отметить, что определенное понятие белого шума относится только к спектральной картине случайного процесса и оставляет совершенно открытым вопрос о законах распределения. Точнее говоря, его распределение вероятностей в обычном смысле не существует.

Белый шум является идеализацией, никогда не реализуемой на практике, так как, во-первых, достаточно близкие значения случайной функции практически всегда зависимы и, во-вторых, реальные процессы имеют конечную мощность, а для белого шума полная мощность процесса бесконечна.

#### 4.10. Преобразование случайных сигналов временными фильтрами

Корреляционно-спектральная теория случайных процессов играет исключительно важную роль при исследовании вопросов о связи случайных компонент сигналов на входе и выходе линейных временных фильтров. Фильтр представляет собой устройство, преобразующее входной сигнал  $x(t)$  в выходной сигнал  $y(t)$  по некоему закону, определяемому линейным оператором  $\hat{L}$ :

$$\hat{L}x(t) = y(t). \quad (4.10.1)$$

Благодаря тому, что  $\hat{L}$  – линейный оператор, выполняется принцип суперпозиции. Его математическим выражением является интеграл

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t' - t)x(t')dt'. \quad (4.10.2)$$

Входящая в этот интеграл функция импульсного отклика системы  $h(t' - t) = \hat{L}\{\delta(t' - t)\}$  характеризует форму сигнала на выходе системы при подаче на ее вход узкого  $\delta$ -образного импульса. Фурье-образ функции импульсного отклика называется *передаточной функцией* системы  $H(\omega)$ . Она связывает

между собой спектры выходного  $Y(\omega)$  и входного  $X(\omega)$  сигналов

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega). \quad (4.10.3)$$

Будем описывать статистические свойства случайного сигнала на входе в систему с помощью автокорреляционной функции  $R_x(\tau)$ , задаваемую выражением (4.3.5). Энергетический спектр входного сигнала  $F_x(\omega)$  связан с функцией  $R_x(\tau)$  теоремой Винера-Хинчина

$$F_x(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.10.4)$$

Найдем связь между автокорреляционными функциями и энергетическими спектрами входного и выходного сигналов. Автокорреляционная функция выходного сигнала определяется, как

$$R_y(\tau) = \langle y(t)y(t+\tau) \rangle. \quad (4.10.5)$$

Заменяя в формуле (5)  $y(t)$  и  $y(t+\tau)$  интегралами суперпозиции (2), получаем

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_h(t-\tau) R_x(t) dt, \quad (4.10.6)$$

где

$$\Gamma_h(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau+\sigma)h(\sigma) d\sigma. \quad (4.10.7)$$

Перейдем в (6) от корреляционных функций к энергетическим спектрам сигналов. В результате получим следующее выражение для выходного сигнала

$$F_y(\omega) = |H(\omega)|^2 F_x(\omega). \quad (4.10.8)$$

Часто представляет интерес величина дисперсии флуктуаций сигнала на выходе фильтра

$$R_y(0) = \langle y^2(t) \rangle. \quad (4.10.9)$$

Из формул (5) – (7) следует, что

$$\langle y^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_h(t) R_x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 F_x(\omega) d\omega. \quad (4.10.10)$$

Отметим, что передаточная функция системы  $H(\omega)$  входит в выражения (8) и (10), взятая в абсолютном значении. Поэтому мы не можем сделать вывода о степени коррелированности между максимумами и минимумами выходных и входных сигналов. Для получения этой информации необходимо вычислить функцию взаимной корреляции

$$R_{xy} = \langle x(t)y(t+\tau) \rangle. \quad (4.10.11)$$

Для нее может быть получено выражение

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-t) R_x(t) dt. \quad (4.10.12)$$

Выполнив преобразования Фурье обеих частей этого соотношения, получим зависимость

$$F_{xy}(\omega) = H(\omega) F_x(\omega), \quad (4.10.13)$$

в которой теперь сохранена через множитель  $H(\omega)$  информация о фазах.

Степень сходства между  $y(t)$  и  $x(t)$  проще всего определить, обнулив  $\tau$  в (12):

$$\begin{aligned} \langle x(t)y(t) \rangle &= R_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)R_x(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)F_x(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (4.10.14)$$

Часто при сравнении входного и выходного сигнала используется величина

$$E = \langle [y(t) - x(t)]^2 \rangle. \quad (4.10.15)$$

Эта величина часто используется в задачах оптимальной фильтрации.

Результаты выполненного выше анализа преобразования стохастических сигналов линейными системами широко используются в оптике. Они применяются при исследовании флуктуаций сигналов в линейных оптических усилителях, в оптических волноводах, волокнах и других устройствах и элементах. В то же время для решения задач, связанных с передачей через оптические системы изображений со стохастическими искажениями, рассмотренный аппарат анализа нуждается в доработке. Это связано, прежде всего, с тем, что для описания соотношения между структурой световой волны в оптической плоскости объекта и в плоскости изображения необходимы функции двух поперечных координат. Любую оптическую систему, осуществляющую преобразование структуры световой волны, можно рассматривать в виде пространственного фильтра. Соответствующий формализм описания рассмотрен в *приложении 9*.

## **Дополнение. Использование программного пакета MathCAD в статистических расчетах**

Статистический анализ разнообразных физических явлений требует, как правило, проведения больших объемов вычислений с использованием компьютеров. В некоторых случаях расчеты предполагают разработку специального программного обеспечения. Однако очень часто достаточно бывает воспользоваться возможностями типовых программных пакетов, таких как MathCAD, MATLAB, STATISTICA и SPSS. Для иллюстрации этих возможностей приведем некоторые сведения из описания пакета MathCAD.

### ***Генерация случайных чисел***

Программный пакет MathCAD содержит ряд эффективных генераторов случайных чисел, с помощью которых, используя встроенные функции, можно исследовать характеристики приведенных ранее функций распределения.

Для получения случайной величины  $X$  в виде последовательности случайных чисел, подчиняющихся нормальному распределению, можно воспользоваться встроенной функцией  $\text{pnorm}(n, \bar{X}, \sigma)$ , где  $n$  – количество чисел,  $\bar{X}$  – среднее значение случайной величины,  $\sigma$  – стандартное отклонение. На *рис. Д.1* показан график изменения одного из возможных вариантов изменения случайных чисел  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) при задании параметров  $n = 1024$ ,  $\bar{X} = 1$ ,  $\sigma = 0,5$ .

Отметим, что приведенную последовательность можно рассматривать как случайную выборку из некой генеральной совокупности с объемом выборки  $n$

---

и выборочной дисперсией  $\sigma$  (см. *раздел 3.1*). График на *рис. Д.1* можно рассматривать также в качестве сигнала, характеризующего одну из реализаций нормального стационарного процесса (*раздел 4.1*). В таком случае  $x$  будет означать некую физическую величину, а  $i$  – дискретное время.

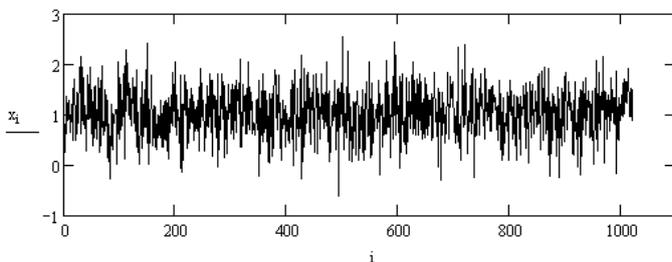


Рис. Д.1. Последовательность случайных чисел с нормальным распределением.

График нормальной плотности распределения вероятностей строится с помощью встроенной функции  $\text{dnorm}(x, \bar{X}, \sigma)$ . Примеры для различных средних и дисперсий показаны на *рис. Д.2*.

Функция нормального распределения вероятностей  $F_x(x)$  строится при помощи функции  $\text{pnorm}(x, \bar{X}, \sigma)$ . Графики двух видов функций нормального распределения приведены на *рис. Д.3*.

Для нахождения квантилей  $x_p$  нормального распределения случайной величины  $X$  используется функция  $\text{qnorm}(p, \bar{X}, \sigma)$ . Так, 98% квантиль при значениях  $\bar{X} = 1$ ,  $\sigma = 0,5$  имеет величину  $\text{qnorm}(p, \bar{X}, \sigma) = 2,027$ .

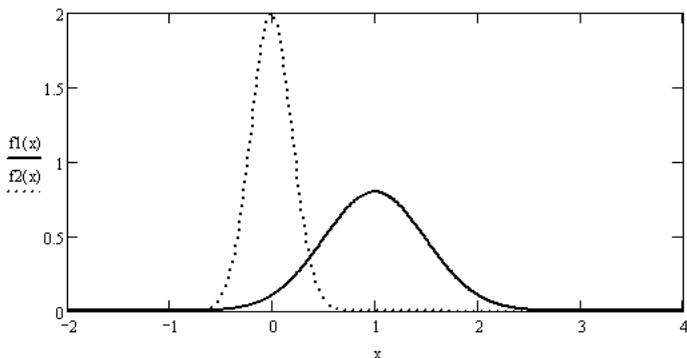


Рис. Д.2. Плотность нормального распределения вероятностей.  
Непрерывная кривая –  $\bar{X} = 1$  и  $\sigma = 0,5$ ; пунктир –  $\bar{X} = 0$ ,  $\sigma = 0,2$ .

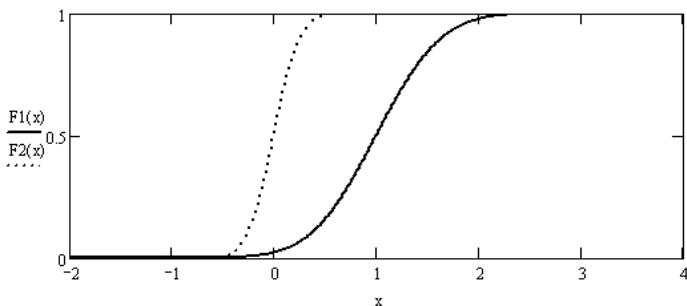


Рис. Д.3. Функции нормального распределения вероятностей.  
Непрерывная кривая –  $\bar{X} = 1$  и  $\sigma = 0,5$ ; пунктир –  $\bar{X} = 0$ ,  $\sigma = 0,2$ .

Случайный сигнал, характеризующийся логарифмически нормальным распределением вероятности, получается применением функции  $\text{lnnorm}(n, \bar{X}, \sigma)$ . На рис. Д.4 он графически представлен для параметров  $n = 1024$ ,  $\bar{X} = 1$ ,  $\sigma = 0,5$ .

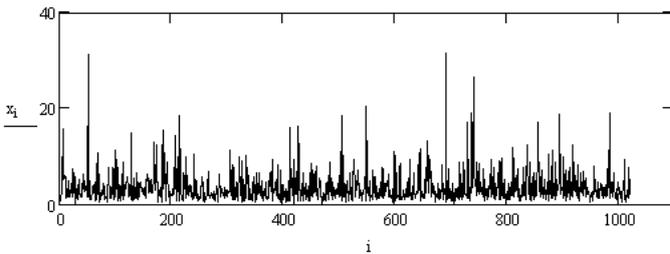


Рис. Д.4. Последовательность случайных чисел с логарифмически нормальным распределением вероятностей.

Логарифмически нормальная плотность распределения вероятностей строится при помощи функции  $\text{lnorm}(x, \bar{X}, \sigma)$ . Ее примеры приведены на *рис. Д.5*.

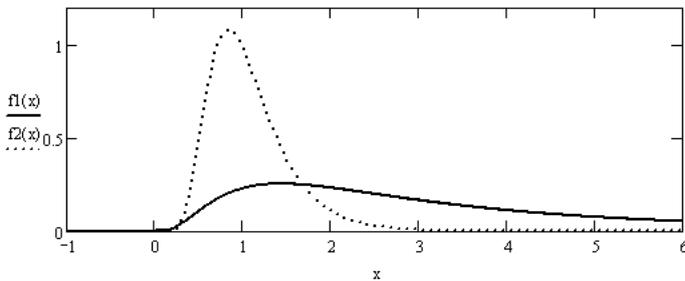


Рис. Д.5. Плотность логарифмически нормального распределения вероятностей. Непрерывная кривая –  $\bar{X} = 1$  и  $\sigma = 0,8$  ;  
пунктир –  $\bar{X} = 0$  ,  $\sigma = 0,4$ .

Для логарифмически нормального распределения вероятностей существует функция  $\text{plnorm}(x, \bar{X}, \sigma)$ . Примеры приведены на *рис. Д.6*.

При помощи функции  $q\lnorm(p, \bar{X}, \sigma)$  находят квантили логарифмически нормального распределения.

Как легко увидеть из приведенных примеров, MathCAD имеет четыре категории встроенных функций. Они различаются написанием их первой литеры, а оставшаяся часть имени функции (ниже в списке функций она условно обозначена звездочкой) идентифицирует тот или иной тип распределения.

$d^*(x, par)$  – плотность вероятности;

$p^*(x, par)$  – функция распределения;

$q^*(x, par)$  – квантиль распределения;

$r^*(M, par)$  – вектор  $M$  независимых случайных чисел, каждое из которых имеет соответствующее распределение;

$x$  – значение случайной величины (аргумент функций);

$p$  – значение вероятности;

$par$  – список параметров распределения.

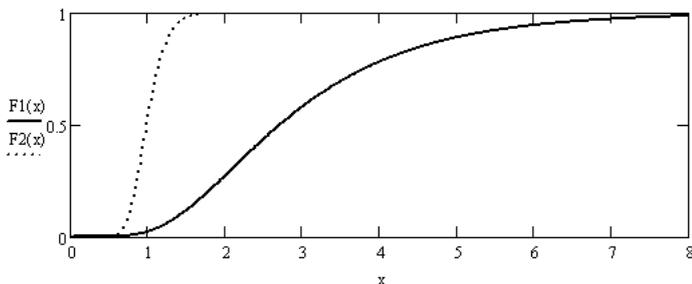


Рис. Д.6. Функции логарифмически нормального распределения вероятностей. Непрерывная кривая –  $\bar{X} = 1$  и  $\sigma = 0,5$ ;

пунктир –  $\bar{X} = 0$ ,  $\sigma = 0,2$ .

---

Для получения функции, относящиеся, например, к равномерному распределению, вместо \* надо поставить `unif` и ввести соответствующий список параметров `par`. В данном случае он будет состоять из двух чисел  $a$  и  $b$  – интервала распределения случайной величины.

Если наряду с построением графиков плотностей вероятностей распределений случайных чисел (или вместо них) требуется построить *гистограмму* соответствующего распределения, можно воспользоваться рядом встроенных функций, позволяющих реализовать построение их различных вариантов. Ниже приведен рисунок, иллюстрирующий применение встроенной функции `hist(int, x)` ( $int$  отражает число столбцов гистограммы и их ширину,  $x$  – последовательность случайных чисел) для сигнала, представленного на *рис. Д.7*, для 50 сегментов гистограммы.

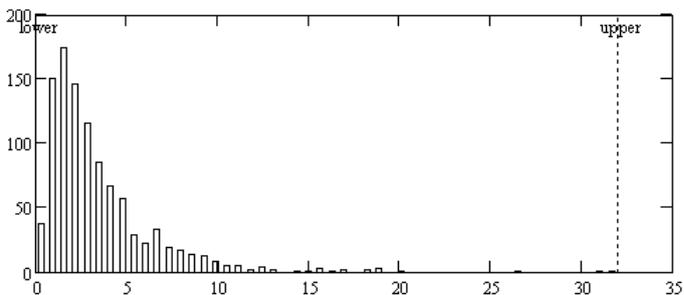


Рис. Д.7. Гистограмма последовательности чисел с логарифмически нормальным распределением вероятностей.

Для определения коэффициентов асимметрии и эксцесса в MathCAD имеются две встроенные функции:

$\text{skew}(x)$  – коэффициент асимметрии выборки случайных чисел  $x$  ;

$\text{kurt}(x)$  – коэффициент эксцесса выборки случайных чисел  $x$  .

Если в качестве примера взять плотности логарифмически нормального распределения вероятностей, графики которых показаны на *рис. Д.5*, то для показанного пунктиром распределения асимметрия окажется равной 1,14, а эксцесс – 2,08; соответствующие параметры для графика в виде непрерывной линии будут равны  $\text{skew}(x) = 3,34$  и  $\text{kurt}(x) = 20,08$  .

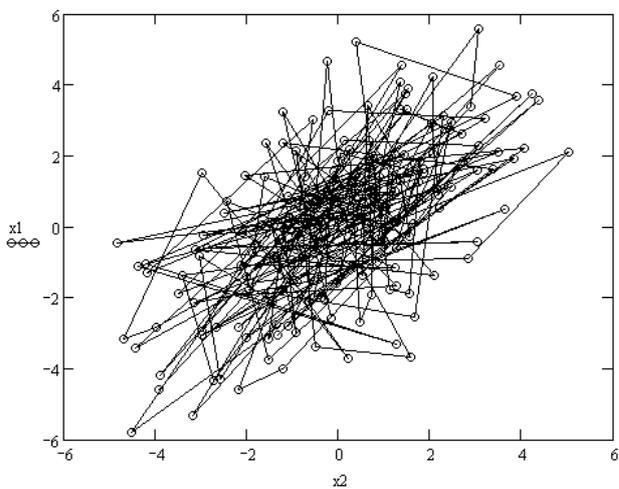
### ***Генерация коррелированных случайных чисел. Ковариация и корреляция***

При моделировании случайных процессов и структур иногда возникает необходимость в генерации двух последовательностей случайных чисел, элементы которых попарно коррелировали бы с некоторым коэффициентом корреляции  $R$  . Процедура создания таких последовательностей состоит в следующем. Сначала получается первая последовательность случайных чисел  $x$  (например, с нормальным распределением, общим числом элементов  $N = 200$  , стандартным отклонением  $\sigma = 2$  , и нулевым средним значением). Вторая –  $y$  строится по формуле

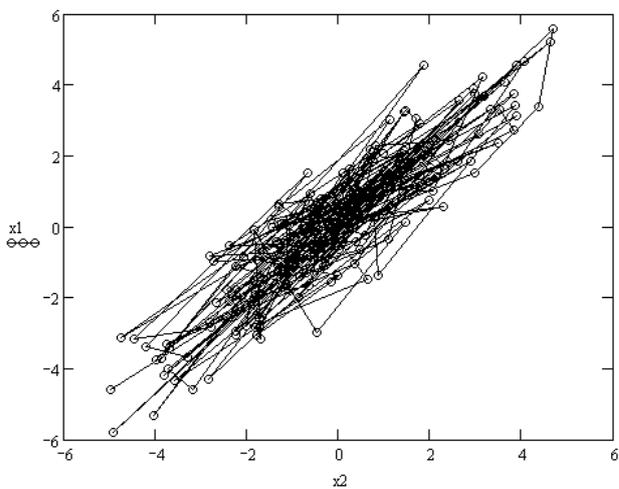
$$y = xR + \sqrt{1 - R^2} \text{norm}(N, 0, \sigma). \quad (\text{Д.1})$$

Согласованные изменения величин  $x$  и  $y$  для разных значений  $R$  показаны на *рис. Д.8*.

Для установления связи между двумя случайными последовательностями в MathCAD существуют



*a*



*б*

Рис. Д.8. Изменения случайных чисел с корреляцией.  
*a* –  $R = 0,5$ , *б* –  $R = 0,9$ .

функции, называемые ковариацией ( $\text{covar}(x, y)$ ) и коэффициентом корреляции ( $\text{corr}(x, y)$ ). Ковариация и коэффициент корреляции определяются согласно формулам

$$\text{covar}(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x - \bar{x})(y - \bar{y}), \quad (\text{Д.2})$$

$$\text{corr}(x, y) = \frac{\text{covar}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (\text{Д.3})$$

Для рассмотренных выше последовательностей  $x$  и  $y$  ( $R = 0,5$ ) оценка дает следующие значения:  $\text{covar}(x, y) = 1,928$ ,  $\text{corr}(x, y) = 0,493$ .

### ***Моделирование стохастизации лазерного пучка в атмосфере***

MathCAD обладает широкими возможностями для моделирования сложных оптических явлений. В качестве примера приведем анализ стохастизации лазерного пучка при развитии мелкомасштабной турбулентности в атмосфере.

Воспользуемся простейшей одномерной моделью, в которой прохождение излучения через случайно-неоднородную среду с изменяющимися характеристиками турбулентности заменяется его прохождением через движущийся фазовый экран с параметрами, зависящими от поперечной координаты. Такая упрощенная модель, хотя и не позволяет получить корректные количественные характеристики изучаемых явлений, дает возможность на качественном уровне выявить основные физические факторы, определяющие пространственно-временную структуру излучения, и сопоставить поведение лазерных пучков при их

вариации. Случайное распределение фазы на экране описывалось функциями Вейерштрасса:

$$\Phi_k = \frac{\sqrt{2}\sigma_0 [1 - b^{2D-4}]^{1/2}}{4 [1 - b^{(2D-4)(N+1)}]^{1/2}} \sum_{n=0}^N b^{(D-2)n} \cos(2\pi s b^n k + \psi_n), \quad (\text{Д.4})$$

где  $\psi_n$  – случайная фаза  $n$ -ой гармоники,  $N$  – число гармоник,  $\sigma_0$  – стандартное отклонение фазы световых колебаний после прохождения плоской волной фазового экрана,  $b$ ,  $s$  – масштабирующие параметры,  $k$  – дискретная поперечная координата. Параметр  $D$  при достаточно большом количестве гармоник определяет фрактальную размерность распределения фазы на экране.

В тех случаях, когда с помощью фазового экрана описывалась слаборазвитая мелкомасштабная турбулентность, в выражении (4) использовалось небольшое число гармоник. (Обычно использовались лишь две гармоники,  $N = 1$ ). При описании развитой мелкомасштабной турбулентности количество гармоник увеличивалось до 10.

Считалось, что лазерный пучок имеет гауссов профиль и плоский волновой фронт при падении на фазовый экран. Тем самым, его амплитуда перед экраном задавалась в виде выражения

$$A_{km}^{(0)} = e^{-\frac{(k-m)^2}{w^2}}. \quad (\text{Д.5})$$

Здесь  $w$  – радиус пучка,  $m$  – координата, определяющая положение центра пучка. После прохождения фазового экрана амплитудно-фазовый профиль пучка задавался комплексной амплитудой

$$A_{km} = e^{-i\Phi_k} e^{-\frac{(k-m)^2}{w^2}}. \quad (\text{Д.6})$$

Распределение поля за экраном определялось для дальней зоны. Для этого использовалась процедура быстрого преобразования Фурье распределения (6). Затем вычислялось распределение интенсивности  $I_{km} = |A|^2$  по координате  $k$  для фиксированных значений  $m$ . Для каждого  $m$  в дальней зоне находилась координата “центра тяжести” пучка  $k_{cm}$

$$k_{cm} = \frac{\sum_{k=0}^K I_{km} k}{\sum_{k=0}^K I_{km}}. \quad (Д.7)$$

Количество значащих точек  $K$  отражает эффективную ширину экрана.

Указанные зависимости позволяют описать флуктуации интенсивности в центре тяжести пучка при относительном смещении экрана по отношению к световому пучку (смещение задается величиной параметра  $m$ ).

Результаты численного моделирования представлены на *рис. Д.9, а-в*, относящимся к случаю, когда радиус пучка  $w$  принимает значения 20 (значения определяются количеством значащих точек, фрактальная размерность  $D = 1,5$ ). Левая часть рисунка относится к случаю слабо развитой мелкомасштабной турбулентности, а правая – к случаю сильно развитой. *Рис. Д.9, а* характеризует флуктуации фазы  $\Phi_k$  на экране. На *рис. Д.9, б* изображен профиль интенсивности лазерного пучка  $I_{km}$  в дальней зоне за экраном при произвольно выбранном значении параметра  $m$ , отвечающим за смещение экрана относительно пучка. Кривые

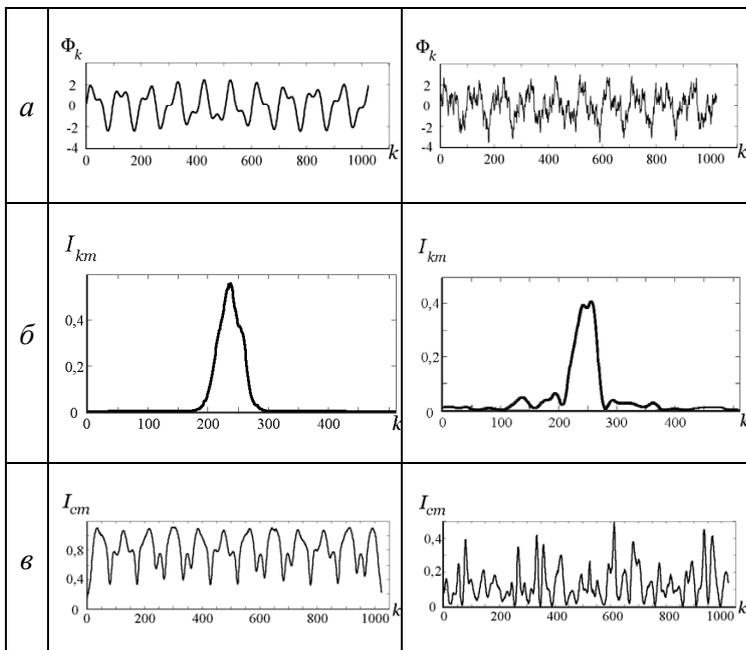


Рис. Д.9. Моделирование флуктуационной структуры излучения в отсутствии (слева) и в присутствии (справа) развитой мелкомасштабной турбулентности. *a* – изменение фазы на экране, *б* – профиль пучка после прохождения экрана, *в* – флуктуации интенсивности в центре тяжести пучка. Радиус пучка  $w = 20$ . (Шкала фаз отложена в радианах, интенсивности – в относительных единицах.)

на рис. Д.9, *в* отражают флуктуации интенсивности в центре тяжести пучка  $I_{cm}$  в зависимости от величины параметра  $m$ .

Моделирующий слабо развитую мелкомасштабную турбулентность фазовый экран характеризуется возмущениями фазы, в отношении которых можно указать некий характерный размер, равный, примерно,

50 значащим точкам по поперечной координате. (Этот размер превосходит поперечный размер лазерного пучка). Развитие же мелкомасштабной турбулентности моделируется наложением на характерные для слаборазвитой турбулентности фазовые неоднородности неупорядоченных высокочастотных составляющих флуктуаций.

Анализ флуктуаций интенсивности показал, что при слаборазвитой мелкомасштабной турбулентности их статистика близка к нормальной, а при сильно – к логарифмически нормальной.

## Приложения

### Приложение 1. Прохождение излучения через случайно неоднородные среды

Статистика, характеризующаяся нормальным и логарифмически нормальным распределениями вероятности, часто обнаруживается при анализе экспериментальных данных, относящихся к локальным флуктуациям интенсивности излучения при его распространении в случайно неоднородной среде. Свойствами такой среды обладает, в частности, приземная атмосфера, которой присущи случайные локальные изменения показателя преломления. При слабых изменениях показателя преломления световое излучение будет сопровождаться флуктуациями, подчиняющимися нормальному закону. При сильных – логарифмически нормальному. Такого рода изменения во флуктуационной структуре излучения авторы данного пособия имели возможность наблюдать при постановке экспериментов на приземной оптической трассе. Длина 560 метров, расположенной на высоте 25 метров, распространялся лазерный пучок с длиной волны 0,63 мкм. Регистрировались флуктуации интенсивности в центре тяжести пучка. Используемой трассе, построенной на базе зданий МГУ на юго-западе Москвы, был присущ режим перемежаемости мелкомасштабной турбулентности. Ему было свойственно спорадическое развитие мелкомасштабной турбулентности, приводящей к стохастизации поперечной структуры лазерного пучка. В отсутствие развитой мелкомасштабной турбулентности структура пучка имела квазирегулярный характер (*рис. П.1.1, а*), при ее наличии приобретала спеклоподобный вид (*рис. П.1.1, б*).

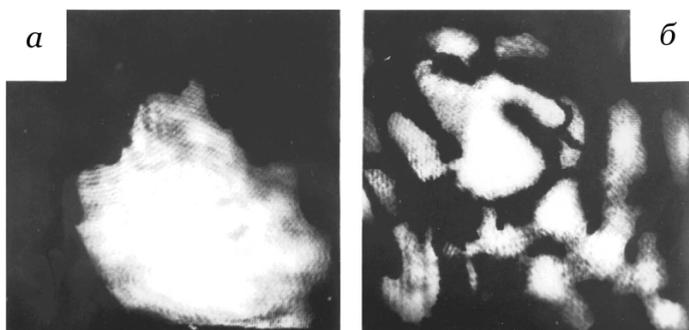


Рис. П.1.1. Структура лазерного пучка в отсутствии (а) и в присутствии (б) развитой мелкомасштабной турбулентности.

Флуктуации интенсивности пучка регистрировались с помощью быстродействующего фотоэлемента.  $I$ , отн.ед.

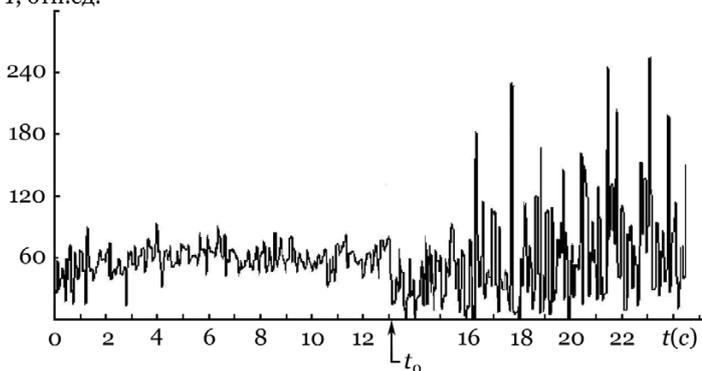


Рис. П.1.2. Флуктуации интенсивности в центре тяжести пучка для квазирегулярной ( $t < t_0$ ) и стохастической ( $t > t_0$ ) структур светового поля.

Одна из типичных реализаций флуктуаций интенсивности за временной промежуток, включающий как стадию отсутствия развитой мелкомасштабной турбу-

лентности, так и стадию ее присутствия, показана *рис. П.1.2*. Уже из общего характера колебаний интенсивности видно, что в квазирегулярном состоянии пучка ( $t < t_0$ ) качественная картина его флуктуаций описывается нормальным законом, а в стохастическом – логарифмически нормальным (сравните приведенную реализацию изменений интенсивности с графиками на *рис. Д.1* и *Д.4*).

## Приложение 2. Статистическая модель оптических шумов

В оптической практике с биномиальным законом распределения и законом распределения Пуассона часто приходится сталкиваться в случаях, когда необходим корректный учет присутствующих в оптических изображениях шумов. В роли этих шумов выступают флуктуации, вызывающие зернистую структуру изображения в силу пространственно-неоднородной чувствительности регистрирующей среды или фотоэлемента. Наиболее часто зернистая структура изображения моделируется с помощью экрана, напоминающего форму шахматной доски (*рис. П.2.1*).

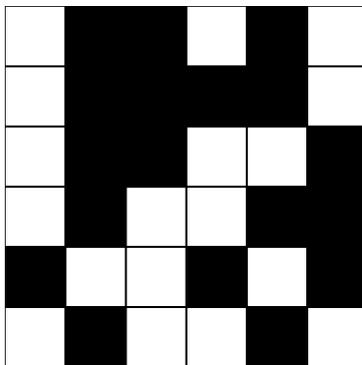


Рис. П.2.1. Моделирующий экран с квадратными элементами.

Пусть площадь действующего отверстия регистрирующей системы  $A = L^2$  и на нее приходится  $N$  квадратов,  $m$  из которых прозрачны, а  $n$  непрозрачны (зерна). Будем также считать, что площадь каждого зерна  $a = l^2$ , а вероятность того, что случайно выбранный квадрат окажется прозрачным, при большом числе квадратов равна отношению «прозрачной» площади ко всей площади, т.е.  $p = m/N = T$ , где  $\bar{T}$  – общее пропускание. Общее число квадратов на площади  $A$  равно

$$N = \frac{A}{a} = \frac{L^2}{l^2} = m + n.$$

Определим вероятность  $P_N(m)$  того, что среди  $N$  белых и черных квадратов будет точно  $m$  белых квадратов. Ясно, что существует  $N$  положений для первого белого квадрата,  $(N-1)$  – для второго и  $(N-m+1)$  положений – для  $m$ -го белого квадрата. Общее число перестановок для  $m$  элементов среди  $N$  положений равно

$$N(N-1)(N-2)\dots(N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!},$$

но так как  $m$  белых квадратов ничем не отличаются друг от друга, то число сочетаний  $m$  неразличимых элементов составляет

$$C_m^N = \frac{N!}{m!(N-m)!}.$$

Вероятность появления каждого из  $m$  квадратов равна  $p$ , а вероятность  $(N-m)$  черных квадратов равна  $(1-p)$ . Учтя все это, приходим к биномиальному

распределению, задаваемому формулой (1.4.1), в которой  $p = \bar{T}$ .

Если увеличить  $N$  и в то же время уменьшить  $p$ , так, чтобы при этом  $\bar{m} = pN$  оставалось конечным, то биномиальное распределение будет стремиться к пуассоновскому распределению, выражаемого формулой

$$P_N(m) \approx \frac{(\bar{m})^m e^{-\bar{m}}}{m!},$$

где  $\bar{m} = pN$ .

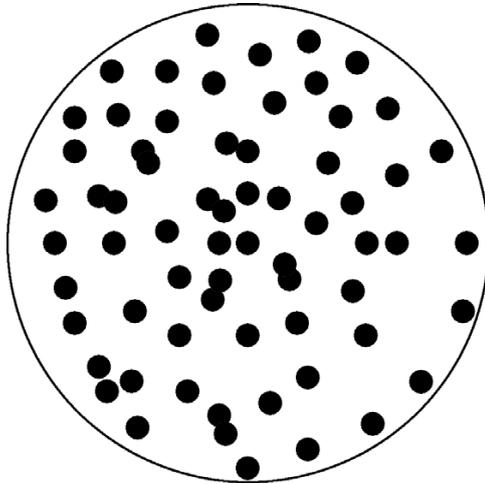


Рис. П.2.2. Модель экрана с круглыми зёрнами.

Отметим, что закон Пуассона хорошо описывает статистику другой модели зернистой структуры, состоящей из круглых перекрывающихся зёрен (рис. П.2.2). Если предположить, что зёрна круглые и их центры расположены случайно, то вероятность

обнаружения  $n$  зерен на площади  $A$  будет определяться выражением

$$P_n(A) = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!},$$

где  $d = \bar{n}/A$  – плотность заполнения зернами.

### Приложение 3. Теория фотоотсчетов

При падении электромагнитных волн падают на фоточувствительную поверхность, происходит сложная последовательность событий. Основные звенья этой цепочки таковы: 1) поглощение кванта световой энергии (фотона) и передача ее возбужденному электрону, 2) перенос возбужденного электрона к поверхности и, наконец, 3) его выход с поверхности. Будем называть выход электрона с фоточувствительной поверхности *фотособытием*. Число  $K$  таких фотособытий, проходящих в данном временном интервале, назовем *числом фотоотсчетов*.

Полуклассическая теория фотоотсчетов основывается на следующих трех предположениях относительно статистических свойств фотособытий. Во-первых, принимается, что вероятность отдельного фотособытия на площади фоточувствительной поверхности, малой по сравнению с площадью когерентности падающего света, за время, меньшее времени когерентности света (но намного больше периода оптических колебаний), пропорционально интенсивности падающей волны, длине интервала времени и рассматриваемой площади фоточувствительной поверхности. В математической записи вероятность наблюдения одного фотособытия за время  $\Delta t$  на площади  $\Delta A$  имеет вид

$$P(1; \Delta t, \Delta A) = \alpha \Delta t \Delta A I(x, y; t), \quad (\text{П.3.1})$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности, а  $I(x, y; t)$  – интенсивность волны в момент времени  $t$  в точке с координатами  $(x, y)$ . Во-вторых, принимается, что вероятность более чем одного события, происходящего за такой временной интервал и на такой малой поверхности пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью одного фотособытия и с вероятностью его отсутствия. (Следовательно, возможность многократных событий исключается.) В-третьих, принимается, что числа фотособытий, происходящих в любых двух неперекрывающихся временных интервалах, статически независимы. (Процессы фотоэмиссии не имеют «памяти».)

Несложно заметить, что эти три предположения отражают условия получения пуассоновского распределения (см. *раздел 1.4*). Если каждое событие представить пространственно-временной дираковской  $\delta$ -функцией единичной площади, то мы получим случайный процесс, который будет пространственно-временным пуассоновским импульсным процессом со скоростной функцией, равной интенсивности света, умноженной на коэффициент пропорциональности  $\alpha$ . Поэтому в соответствии с формулой (1.4.2) вероятность наблюдения  $K$  фотособытий во временном интервале  $(t, t + \tau)$  может быть записана в виде

$$P(K) = \frac{(\bar{K})^K}{K!} e^{-\bar{K}}, \quad (\text{П.3.2})$$

где  $\bar{K}$  – среднее число фотособытий, которое дается выражением

$$\bar{K} = \alpha \iint_A \int_t^{t+\tau} I(x, y; \xi) d\xi dx dy \quad (\text{П.3.3})$$

( $A$  – освещаемая площадь фоточувствительной поверхности).

Для удобства этот результат записывают, вводя величину, которую называют *интегральной интенсивностью*  $W$ . Она имеет размерность энергии и определяется как

$$W = \iint_A \int_t^{t+\tau} I(x, y; \xi) d\xi dx dy. \quad (\text{П.3.4})$$

Заметим, что возможно более простая форма записи, если интенсивность света, падающего на фоточувствительную поверхность, постоянна во времени или в пространстве. Так, если интенсивность имеет постоянное значение  $I_0$  (независящее как от времени, так и от пространственных координат), то выражение для  $W$  сводится к виду

$$W = I_0 A \tau. \quad (\text{П.3.5})$$

Записанное с использованием интегральной интенсивности выражение для вероятности наблюдения  $K$  фотособытий таково:

$$P(K) = \frac{(\alpha W)^K}{K!} e^{-\alpha W}. \quad (\text{П.3.6})$$

Можно выразить постоянную  $\alpha$  через другие, более знакомые нам физические константы. Интегральная интенсивность  $W$  фактически равна энергии света, падающего на фоточувствительную поверхность за интересующие нас время измерения, а каж-

дый фотон несет энергию  $h\bar{\nu}$ , таким образом, среднее число фотособытий за время  $\tau$  равно

$$\bar{K} = \alpha W = \frac{\eta W}{h\bar{\nu}}, \quad (\text{П.3.7})$$

где  $h$  – постоянная Планка ( $6,626196 \cdot 10^{-34}$  Дж·с),  $\bar{\nu}$  – средняя оптическая частота излучения, а  $\eta$  – так называемый *квантовый выход* (среднее число фотособытий, вызываемых одним падающим фотоном,  $\eta \leq 1$ ). Итак, коэффициент пропорциональности  $\alpha$  равен

$$\alpha = \frac{\eta}{h\bar{\nu}}. \quad (\text{П.3.8})$$

#### Приложение 4. Применение центральной предельной теоремы в оптике

С центральной предельной теоремой оптике приходится встречаться довольно часто. При этом ее применение не всегда непосредственно связано со статистической природой явлений. Некоторые из них возникают как следствие многократного повторения операции свертки.

**Каскадные оптические системы.** Линейные оптические системы иногда могут образовывать своего рода «каскад», когда выходное изображение одной из систем служит входом для другой. В этом случае полная оптическая передаточная функция  $\tau_{\text{полн}}(\omega)$  равна произведению передаточных функций  $\tau_m(\omega)$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) отдельных систем:

$$\tau_{\text{полн}}(\omega) = \tau_1(\omega)\tau_2(\omega)\dots\tau_n(\omega). \quad (\text{П.4.1})$$

Если число  $n$  равно трем или более, а отдельные  $\tau_m(\omega)$  – аналогичные функции, то в соответствии с центральной предельной теоремой функция  $\tau_{\text{полн}}(\omega)$  должна хорошо аппроксимироваться гауссовой передаточной функцией. Функция рассеяния точки, представляющая собой Фурье-образ функции  $\tau(\omega)$ , также должна быть гауссовой.

**Лазерный резонатор.** В лазерном резонаторе оптическое излучение многократно проходит расстояние между зеркалами. Предположим, что эти зеркала имеют форму квадрата со стороной  $a$ , а расстояние между ними равно  $b$ . Пусть  $v(x_2)$  – амплитуда волны в точке  $x_2$  на втором зеркале, тогда в соответствии с дифракционной формулой Френеля эта амплитуда связана с распределением поля  $v(x_1)$  на первом зеркале следующим образом:

$$v(x_2) = \gamma \int_{-a}^a v(x_1) K(x_2 - x_1) dx_1, \quad (\text{П.4.2})$$

где ядро преобразования имеет вид:

$$K(x) = (\lambda b)^{-1/2} \exp(-i\pi x^2 / \lambda b) \quad (\text{П.4.3})$$

В этих выражениях  $\gamma$  – некоторый числовой множитель, характеризующий потери и фазовые сдвиги волны в резонаторе, а  $\lambda$  – длина световой волны.

Уравнение (2) означает, что амплитуда поля на зеркале 2 равна свертке с ядром  $K(x)$  поля  $v(x_1)$ , обрезаемого в пределах  $|x_1| > a$ . Так как процесс распространения излучения от зеркала к зеркалу повторяется многократно, выходная волна после  $n$ -кратного прохождения резонатора является результатом

последовательного применения  $n$  раз двух операций (усечения поля и его свертки).

Если бы на каждом шаге не происходило усечение поля апертурой зеркала, то мы имели бы только последовательные свертки и, таким образом, выполнялась бы центральная предельная теорема. Операция усечения меняет ситуацию, так как она действует на результат каждой операции свертки. Она порождает добавочные осцилляции функций, которые затем подвергаются свертке. В результате не получается гладкой гауссовой кривой, которую дает центральная предельная теорема. Эти осциллирующие функции в итоге сходятся к некоторым устойчивым модам лазерного резонатора.

Однако если отношение  $a/b$  достаточно велико, то в (2) эффект усечения оказывается слабым, поскольку, прежде чем  $x_1$  достигнет границы  $x_1 = \pm a$ , функция  $\psi(x_1)$  уменьшится практически до нуля. В этом случае поле в резонаторе после  $n$  отражений является результатом  $n$  операций свертки с ядром (3) и, следовательно, приобретает близкое к гауссовскому распределение по поперечным координатам. На *рис. П.4.1* показаны зависимости распределения по поперечной координате амплитуды поля в резонаторе при  $n=1$  и  $n=300$ . Там же для сравнения приведена гауссовская кривая.

**Атмосферная турбулентность.** Данный пример применения центральной предельной теоремы непосредственно связан со статистической природой явлений, которые возникают при сложении  $n$  случайных величин. При этом мы имеем дело со «случайными блужданиями».

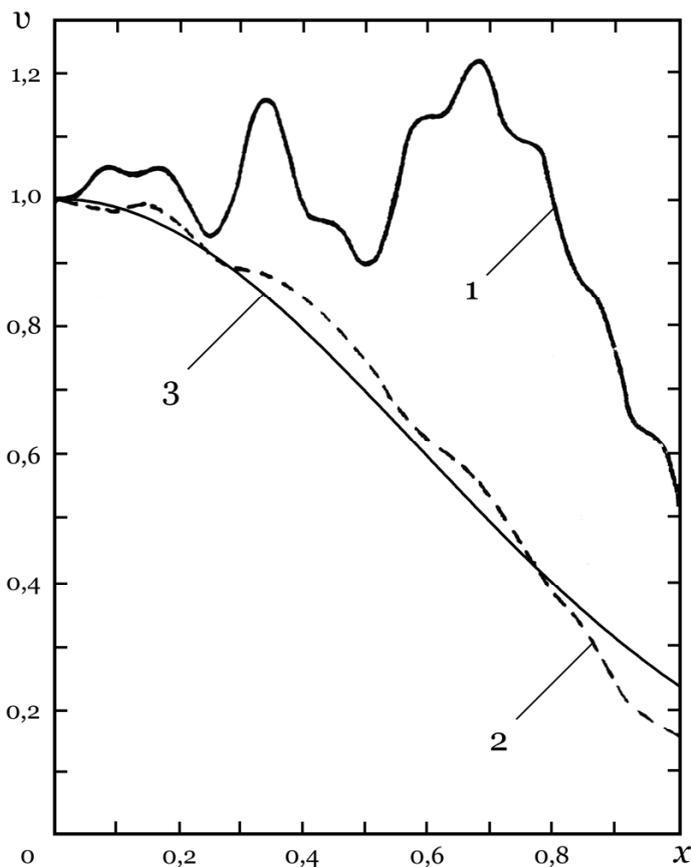


Рис. П.4.1. Распределение амплитуды поля в оптическом резонаторе при  $n = 1$  (1, непрерывная линия) и  $n = 300$  (2, пунктир). Кривая 3 – гауссовское распределение.

Рассмотрим модель турбулентной атмосферы, слой которой, находящийся между источником и приемником света, моделируется рядом экранов небольшой толщины, каждый из которых дает сдвиг фазы, не зависящий от пространственных координат, но случайным образом изменяющийся во времени. Эти эк-

раны расположены перпендикулярно линии, соединяющей источник и приемник. В данный момент времени полная фаза световой волны  $\varphi_{\text{полн}}$  в приемнике равна сумме отдельных ее сдвигов  $\varphi_m$  на этих экранах:

$$\varphi_{\text{полн}} = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n, \quad (\text{П.4.4})$$

где  $\varphi_m = n_m \Delta h_m$ , а  $n_m$  – случайный показатель преломления на  $m$ -м экране и  $\Delta h_m$  – эффективная толщина каждого экрана. Поскольку турбулентность атмосферы изменяется независимо от одного моделирующего экрана до другого (или, по крайней мере, от одной группы экранов до другой) и фазовые флуктуации в пределах каждого экрана подчиняются одним и тем же статистическим закономерностям, то выполняется центральная предельная теорема и, следовательно,  $\varphi_{\text{полн}}$  подчиняется нормальному закону распределения. Это стандартное предположение, которое делается при рассмотрении плотности вероятности  $f(\varphi_{\text{полн}})$  в отдельной точке приемной апертуры. В более общем случае предполагается правомерность гауссовского закона для совместной плотности распределения вероятности фаз  $f(\varphi_{\text{полн}}, \varphi'_{\text{полн}})$  в двух точках апертуры.

Равенство (4) описывает случайное блуждание луча. Каждая фаза  $\varphi_m$  приводит к независимому по величине и направлению изменению траектории луча. Поэтому проекция суммы  $m$  (где  $m = 1, 2, \dots, n$ ) последовательных смещений луча на направление, перпендикулярное линии, соединяющей излучатель и прием-

ник, будет испытывать случайные блуждания влево и вправо от этого направления.

**Статистика многомодового колебания.** К центральной предельной теореме приходится обращаться также при анализе многомодовой генерации лазера. Обычно лазер излучает целый ряд статистически независимых мод, поэтому многомодовая модель оказывается одной из весьма распространенных для лазерного излучения. Оно представляет собой суперпозицию  $N$  мод и обладает спектром, качественный вид которого показан на *рис. П.4.2*. При этом суммарное колебание светового поля будет описываться выражением

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(\omega_n t + \psi_n) = \sum_{n=1}^N a_n \cos \Phi_n. \quad (\text{П.4.5})$$

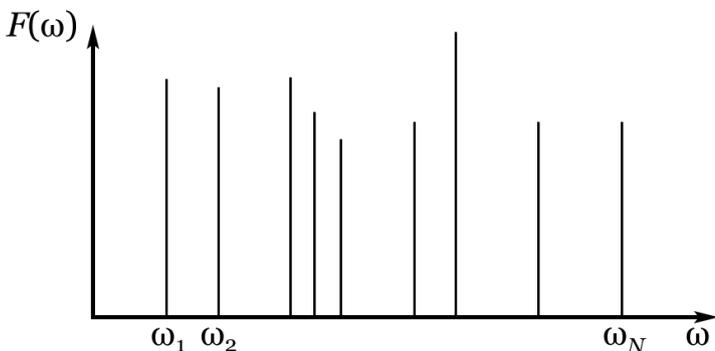


Рис. П.4.2. Спектр многомодового колебания.

Будем считать, что амплитуды мод  $a_n$  и их частоты  $\omega_n$  постоянны, а фазы  $\psi_n$  распределены равномерно:

$$f(\psi_n) = \pi/2, \quad -\pi \leq \psi_n \leq \pi, \quad (\text{П.4.6})$$

и статистически независимы:

$$f(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N) = \prod_{n=1}^N f(\psi_n). \quad (\text{П.4.7})$$

Можно показать, что в общем случае генерируемых мод с разными частотами функция плотности распределения вероятности величины  $\xi$  при  $N \rightarrow \infty$  сходится к гауссовской. Удобный способ нахождения функции распределения  $f(\xi)$  основан на расчете его характеристической функции

$$\varphi(v) = \langle e^{i\xi v} \rangle.$$

Подстановка в это соотношение выражения (5) дает

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \left\langle \exp \left\{ iv \sum_{n=1}^N a_n \cos \Phi_n \right\} \right\rangle = \\ &= \prod_{n=1}^N \langle \exp \{ i v a_n \cos \Phi_n \} \rangle = \prod_{n=1}^N \varphi(v a_n). \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi(v a_n)$  – характеристическая функция одной моды:

$$\begin{aligned} \varphi(v a_n) &= \langle \exp \{ i v a_n \cos \Phi_n \} \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \{ i v a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \} d\varphi_n = J_0(v a_n), \end{aligned}$$

где  $J_0(x)$  – функция Бесселя нулевого порядка от действительного аргумента.

Таким образом, характеристическая функция случайной величины  $\xi$  в целом равна

$$\varphi(v) = \prod_{n=1}^N J_0(v a_n). \quad (\text{П.4.8})$$

Функция распределения  $f(\xi)$  находится из (8) с помощью Фурье-преобразования:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v) e^{-iv\xi} dv.$$

Можно показать, что при  $N \gg 1$

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad \sigma^2 = \frac{Na^2}{2}.$$

Тем самым, мы имеем еще одно подтверждение справедливости центральной предельной теоремы.

### **Приложение 5. Спекл-эффекты при когерентном формировании изображения**

При формировании изображения сложного объекта с помощью высококогерентного поляризованного излучения, генерируемого лазером, распределение интенсивности света принимает сложный вид. Если поверхность объекта шероховата в масштабе оптических длин волн (обычная на практике ситуация), то изображение кажется зернистым, с множеством светлых и темных пятен, не имеющих видимой связи с макроскопическими рассеивающими свойствами объекта. Такое хаотическое неупорядоченное строение принято называть *спекл-структурой*. Спеклы можно наблюдать также при прохождении плоской однородной волны через прозрачную пластину с шероховатой поверхностью. Типичное изображение равномерно отражающей поверхности показано на *рис. П.5.1*.

Причины возникновения спекл-структуры были установлены уже в ранних работах, посвященных лазерам. Большинство поверхностей, естественных и искусственных, являются сильно шероховатыми в

масштабе оптических длин волн. При освещении монохроматическим светом волна, отраженная от поверхности, оказывается состоящей из вкладов большого числа рассеивающих точек или площадок.

Элемент (рис. П.5.2) изображения в точке наблюдения – суперпозиция множества амплитудных функций

размывания (рассеяния), каждая из которых отвечает своей точке на поверхности объекта. Вследствие шероховатости поверхности различные суммируемые функции размывания имеют заметно различающиеся фазы, что приводит к сложной интерферограмме.

Сказанное относится и к случаю прозрачных неоднородных объектов, освещаемых плоской монохроматической волной. Из-за наличия неоднородностей фронт волны, покидающий объект, весьма неровен и имеет исключительно сложную структуру. В силу этого интенсивность прошедшей волны характеризуется большими пространственными флуктуациями, обусловленными перекрытием множества расфазированных функций размывания.

Поскольку мы не знаем детальной микроскопической структуры сложного волнового фронта, покидающего объект, приходится статистически подходить к вопросу о свойствах спекловой структуры. Рассматривается статистическое распределение для ансамбля поверхностей с одинаковыми макроскопическими свойствами, но различающихся в микроскопических

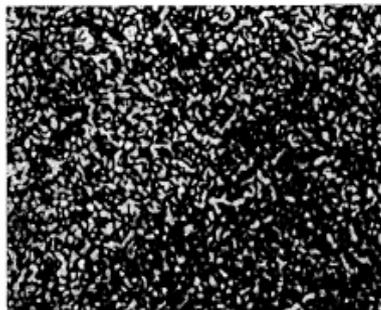


Рис. П.5.1. Спекл-структура на фрагменте изображения объекта.

деталях. Так, если мы поместим фотоприемник в определенную точку плоскости изображения, то измеренная интенсивность не может быть заранее точно предсказана, даже если макроскопические свойства предмета точно известны. Мы можем найти только статистическое распределение этой интенсивности для некоего ансамбля шероховатых поверхностей.

Одной из важных статистических характеристик спекловой структуры является плотность распределения интенсивности  $I$  в некоторой точке изображения.

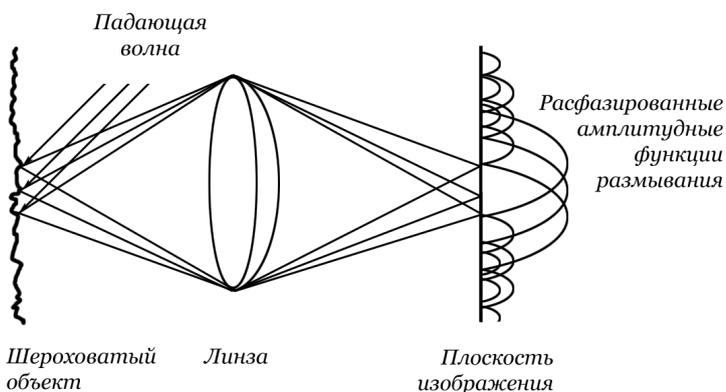


Рис. П.5.2. Образование спекл-структуры на изображении шероховатого объекта.

Какова вероятность наблюдения светлого максимума или темного минимума интенсивности? На этот вопрос можно ответить, увидев аналогию нашей задачи с рассмотренной в разделе 2.2 задаче о суммировании случайных фазоров. В указанном разделе было показано, что плотность распределения вероятности изменений интенсивности (2.2.15) подчиняется экспонен-

циальному распределению с отрицательным показателем.

Так как плотность распределения интенсивности – экспонента с отрицательным показателем, флуктуации относительно среднего значения будут весьма заметными. Если мы определим *контраст*  $C$  спекловой структуры как отношение стандартного отклонения интенсивности к ее среднему значению, то для поляризованного света получим

$$C = \frac{\sigma_I}{\bar{I}} = 1.$$

Высокий контраст спеклов приводит к значительному ухудшению эффективного разрешения и чрезвычайно неудобен, если наблюдателя интересует тонкая структура изображения.

### **Приложение 6. Применение методов математической статистики в обработке наблюдений**

Мы уже упоминали, что применение методов математической статистики в обработке наблюдений основано на глубокой аналогии между произведением наблюдений и отбором генеральной совокупности. При этом в качестве генеральной совокупности рассматривается чисто гипотетически набор всех возможных результатов наблюдений при данном комплексе условий испытаний. Отбор данных из этой совокупности производится в процессе регистрации независимо от нашей воли. Благодаря этому, основным фактором всегда является случайность, что и позволяет применять для обработки наблюдений основные положения теории вероятности.

Отбор данных, происходящий помимо нашей воли, можно назвать *естественным отбором* именно таким он является при наблюдении. Однако при наблюдениях и дальнейшей их обработке часто возникает необходимость и в других, способах *искусственного отбора*. Например, при спектральном анализе вещества приходится делать пробы из разных его областей, чтобы нейтрализовать возможную неоднородность материала; спектры проб находится при этом целиком в нашем распоряжении. Для контроля над производством приходится брать образцы из общей продукции. При различных экономических и демографических исследованиях также нужна предварительная сортировка объектов для изучения. Примеры таких случаев, когда исследователь вынужден принимать сознательное решение, можно еще долго продолжать. Отметим лишь в заключение, что даже заготовленный уже цифровой материал может нуждаться в дополнительной проверке в целях сокращения объема, для удаления неподходящих данных и верификации результатов расчетов – подобный отбор также производится исследователем целиком по его воли.

Существует много способов искусственного отбора. Они зависят от цели отбора и поставленной задачи. В целом способы делятся на *пристрастные* и *репрезентативные*.

*Пристрастными* называют такие способы отбора, при которых существует заранее намеченный критерий. При этом проверке подлежат все элементы совокупности. Например, из ряда чисел выделяют  $n$  самых больших или все, не достигающие требуемой величины. Этот вид отбора применяют и для изъятия всех реализаций с нарушением условия испытания. Пристрастный отбор является важной стадией эксперимента. Его задача состоит в устранении всех заметных

нарушений условий испытания. Таким образом, нередко удается отбросить доминирующие (несимметричные) факторы, нарушающие нормальность распределения.

Пристрастный отбор всегда является сознательным с ясной характеристикой данных, подлежащих рассмотрению, поэтому он редко вызывает затруднения. Сложнее обстоит дело со второй группой.

Способы отбора называются *репрезентативными*, если извлеченная группа элементов достаточно полно характеризует всю исходную совокупность. Разумеется, как бы ни был удачен отбор, в суждениях обо всей совокупности будет элемент случайности. Более того, некоторые особенности первичного ряда не найдут отражения в полученном, поэтому «репрезентативность» отбора является относительной и связана с конкретной числовой характеристикой, которая изучается с помощью извлеченных элементов.

Фактически репрезентативный отбор применяется при невозможности (либо затруднительности) суждения о характеристиках совокупности при использовании всех ее элементов из-за чрезмерной величины или неполной доступности анализу. Если объем  $N$  очень велик, то на практике его можно считать бесконечным. В этом случае исходную совокупность рассматривают как генеральную, а извлеченные элементы как выборку, получая в дополнение все позитивные моменты выборочного метода. Если  $N$  не очень велико по сравнению с  $n$  полученных элементов (скажем,  $N < 10n$ ), то с числом  $N$  необходимо считаться при интерпретации результатов.

Способ репрезентативного отбора зависит от степени наших знаний о совокупности. Если, например, известно, что элементы совокупности расположены

случайным образом, то к ней применим *механический отбор* – отбирается каждый пятый, десятый или еще какой элемент. Если же в последовательности наблюдается некоторая ритмичность, необходимо применять *аритмичный отбор*, например, в первой десятке выделим первый элемент, во второй – второй... Так, анализируя раз в день качество продукции, не следует брать пробы в одно и то же время.

В случае же, когда о совокупности ничего неизвестно, единственной гарантией репрезентативности может служить *случайный отбор*, для чего требуется перенумеровать все элементы, а номера отобранных должны образовывать случайную последовательность чисел.

Увеличение числа параллельных наблюдений  $n$  является основным способом повышения точности статистического анализа. Среднее значение выборки объема  $n$  имеет дисперсию в  $n$  раз меньшую, чем при одиночных наблюдениях, поэтому для определения необходимого числа наблюдений достаточно знать их генеральную дисперсию  $\sigma^2$  и допустимую дисперсию результата  $D\left[\hat{X}\right]$ . При этом (см. формулу (3.1.5))

$n = \sigma^2 / D\left[\hat{X}\right]$ . Увеличение параллельных наблюдений неограниченно повышает точность получаемого результата, при этом требуется неизменность условий испытаний.

Сигналы, сформированные данной выборкой, часто нуждаются в предварительной подготовке. Эта задача обычно решается путем их фильтрации, заключающейся в устранении одной из составляющих сигнала. Наиболее часто целью фильтрации является подавление быстрых вариаций сигнала, которые обусловлены присутствием шумов различной природы.

Наиболее простым средством подавления быстрых изменений является процедура сглаживания, производимая на основе различных алгоритмов. Часто рассматривают противоположную задачу фильтрации – устранение медленно меняющихся значений в целях исследования высокочастотной составляющей. В этом случае говорят о задаче устранения тренда. Иногда интерес представляют смешанные задачи выделения среднемасштабных вариаций путем подавления как более быстрых, так и более медленных компонент. Одна из возможностей их решения связана с применением полосовой фильтрации. Порой бывает полезным совмещение сглаживания с последующей интерполяцией или регрессией.

На практике устранение тренда осуществляется при помощи следующей процедуры. Сначала вычисляют регрессию (например, линейную), исходя из априорной информации о тренде, затем из данных, принадлежащих выборке, вычитается функция регрессии. При осуществлении полосовой фильтрации реализуют следующую последовательность операций:

1. Приведение массива данных к нулевому среднему значению путем его вычитания из каждого элемента.
2. Удаление из сигнала высокочастотной составляющей, имеющее целью получение сглаженного сигнала.
3. Выделение из сигнала низкочастотной компоненты с помощью снятия тренда.

### **Приложение 7. Обнаружение периодического сигнала**

Часто при проведении оптических исследований и передаче оптической информации световой пучок, распространяющийся в какой-либо среде, для его

идентификации предварительно модулируется по интенсивности. Обнаружить пучок на фоне помех означает ответить на вопрос, существует полезный сигнал или нет. Задача определения его формы при этом не ставится.

Пусть  $p(t)$  – периодический сигнал с неизвестным периодом основным  $T$  и  $b(t)$  – шум. Рассмотрим суперпозицию

$$x(t) = p(t) + b(t). \quad (\text{П.7.1})$$

Для упрощения предположим, что  $p(t)$  и  $b(t)$  централизованы, т.е. их среднее значение равно нулю, тогда сигнал  $x(t)$  также будет централизован. С точки зрения физики, эта гипотеза вполне естественна, так как на практике часто исключают постоянную компоненту, чтобы не «загромождать» измерительную аппаратуру, шкала (или динамический диапазон) которой всегда ограничены.

Автокорреляционная функция в данном случае определяется выражением  $\mathfrak{R}_{xx}(\tau)$

$$\mathfrak{R}_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [p(t) + b(t)][p(t - \tau) + b(t - \tau)] dt. \quad (\text{П.7.2})$$

В силу свойства дистрибутивности функции корреляции имеем

$$\mathfrak{R}_{xx}(\tau) = \mathfrak{R}_{pp}(\tau) + \mathfrak{R}_{bb}(\tau) + \mathfrak{R}_{pb}(\tau) + \mathfrak{R}_{bp}(\tau). \quad (\text{П.7.3})$$

Можно считать, что шум  $b(t)$  и сигнал  $p(t)$  независимы. При этом условии корреляционные функции  $\mathfrak{R}_{pb}(\tau)$  и  $\mathfrak{R}_{bp}(\tau)$  тождественно равны нулю (с точностью до погрешностей оценок, обусловленных конечным временем интегрирования). Автокорреляционная

функция шума  $\mathfrak{R}_{bb}(\tau)$  стремится к нулю с возрастанием  $\tau$  (раздел 4.4); следовательно, для достаточно больших значений  $\tau$  (бóльших по модулю некоторого  $\tau_1$ ) величина  $\mathfrak{R}_{bb}(\tau)$  практически равна нулю с точностью до погрешности оценки. Значение  $\tau_1$ , начиная с которого автокорреляционную функцию  $\mathfrak{R}_{bb}(\tau)$  можно положить равной нулю, зависит от характера шума и, в частности, от его спектральной плотности: чем шире полоса частот шума при заданной полной мощности, тем быстрее убывает автокорреляционная функция. Итак, при  $|\tau| > \tau_1$  в выражении для корреляционной функции периодического сигнала остается только одно слагаемое:

$$\mathfrak{R}_{xx}(\tau) = \mathfrak{R}_{pp}(\tau). \quad (\text{П.7.4})$$

В действительности

$$\mathfrak{R}_{xx}(\tau) = \mathfrak{R}_{pp}(\tau) + \varepsilon(\tau), \quad (\text{П.7.5})$$

где ошибка  $\varepsilon(\tau)$  тем меньше, чем больше время интегрирования  $T$  или временная постоянная усредняющего низкочастотного фильтра.

Итак, описанный корреляционный метод позволяет обнаружить периодический сигнал на фоне шума.

### Приложение 8. Теория когерентности

В теории когерентности фундаментальную роль играет функция взаимной корреляции между оптическими возмущениями, разделенных временным интервалом  $\tau$ , в двух точках пространственной области  $x_1$  и  $x_2$ . В литературе по оптике она известна как функция взаимной когерентности  $\Gamma(x_1, x_2; \tau)$ . Оптическое возмущение, то есть одна из декартовых координат

электрического вектора, представимо в виде интеграла Фурье, взятого по положительным частотам:

$$V^r = \int_0^{\infty} a(\nu) \cos[\varphi(\nu) - 2\pi\nu t] d\nu.$$

Этому реальному возмущению соответствует комплексное, которое называется «аналитическим сигналом»:

$$V(t) = V^{(r)}(t) + iV^{(i)}(t),$$

где

$$V^{(i)}(t) = \int_0^{\infty} a(\nu) \sin[\varphi(\nu) - 2\pi\nu t] d\nu.$$

При этом реальная  $V^{(r)}(t)$  и мнимая  $V^{(i)}(t)$  части не являются взаимно независимыми. С помощью аналитических сигналов строится функция когерентности:

$$\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \tau) = \Gamma_{12}(\tau) = \langle V(\mathbf{x}_1, t + \tau) V^*(\mathbf{x}_2, t) \rangle.$$

Заметим, что величина  $\Gamma_{12}(0)$  характеризует *пространственную когерентность* излучения. Она выражает корреляцию в двух точках пространства в одно и то же время и, поскольку эта величина пропорциональна контрасту полос в звездном интерферометре Майкельсона, ее пространственное преобразование Фурье дает информацию о распределении яркости в источнике излучения. Величина  $\Gamma_{11}(\tau)$  определяет *временную когерентность*. Она представляет собой значение функции корреляции в одной точке пространства для двух моментов времени, и, поскольку она пропорциональна контрасту полос в двулучевом интерферометре Майкельсона, ее временное преобра-

зование Фурье дает информацию о спектральном распределении энергии источника. Иными словами, звездный интерферометр Майкельсона является анализатором пространственных гармоник, а двулучевой интерферометр – временных гармоник.

### **Приложение 9. Сравнение характеристик временных и пространственных фильтров**

Рассмотрим в качестве пространственного фильтра оптическую систему, которая линейным образом преобразует распределение интенсивности света  $o(\xi, \eta)$  в плоскости объекта в распределении интенсивности  $i(x, y)$  в плоскости изображения ( $\{\xi, \eta\}$  и  $\{x, y\}$  – поперечные координаты в плоскостях, соответственно, объекта и изображения). Наиважнейшей характеристикой пространственного фильтра является «функция рассеяния»  $s(x - \xi, y - \eta)$ , описывающая распределение света на плоскости  $(x, y)$ , обусловленное наличием точечного источника в плоскости объекта  $(\xi, \eta)$ . Эта функция, называемая также переходной, является аналогом функции импульсного отклика временного фильтра. В силу линейности оптической системы выполняется принцип суперпозиции, согласно которому

$$i(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x - \xi, y - \eta) o(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (\text{П.9.1})$$

Аналогично временным фильтрам преобразование спектров пространственных частот оптической системы определяется передаточной функцией

$$\tau(\vec{\omega}) = \frac{\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} s(x, y) e^{i(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy}{\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} s(x, y) dx dy}. \quad (\text{П.9.2})$$

Здесь  $\omega_x$  и  $\omega_y$  – пространственные частоты распределения интенсивности вдоль осей  $x$  и  $y$ .

Спектральные распределения световых пучков на выходе из оптической системы  $I(\vec{\omega})$  определяются интенсивным преобразованием вида

$$I(\vec{\omega}) = I(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} i(x, y) e^{-i\vec{\omega}\vec{r}} dx dy. \quad (\text{П.9.3})$$

Аналогичное выражение имеет место для распределения интенсивности  $O(\vec{\omega})$  на входе.

Осуществив преобразования Фурье для обеих частей соотношения (1), получаем зависимость

$$I(\vec{\omega}) = \tau(\vec{\omega})O(\vec{\omega}), \quad (\text{П.9.4})$$

соответствующую зависимости (4.10.3) для временных фильтров.

Совпадение формализма описания временных и пространственных фильтров позволяет распространить на пространственные фильтры подходы к анализу преобразования стохастических сигналов, рассмотренные в *разделе 4.10*. В то же время следует учитывать важные особенности стохастического анализа пространственных фильтров.

Во-первых, преобразования сигналов в пространственных фильтрах двумерны. Во-вторых, при некогерентном освещении интенсивности света линейно складываются, так что все входные и выходные функ-

ции оказываются положительными функциями. Наконец, усреднения для корреляционных функций и их преобразований являются пространственными, а не временными, и производятся по большой площади.

**Таблица**

Временные фильтры	Пространственные фильтры
$R_x(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$	$R_o(\vec{\sigma}) = \langle o(\vec{\sigma})o(\vec{\sigma} + \vec{\sigma}') \rangle$
$R_y(\tau) = \langle y(t)y(t+\tau) \rangle$	$R_i(\vec{\sigma}') = \langle i(\vec{\sigma})i(\vec{\sigma} + \vec{\sigma}') \rangle$
$F_{xy}(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$	$F_{oi}(\vec{\omega}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{oi}(\vec{r}) e^{-i\vec{\omega}\vec{r}} d\vec{r}$
$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_h(t-\tau) R_x(t) dt$	$R_i(\vec{\sigma}') = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_s(\vec{\sigma} - \vec{\sigma}') R_o(\vec{\sigma}) d\vec{\sigma}$
$F_y(\omega) =  H(\omega) ^2 F_x(\omega)$	$F_i(\vec{\omega}) =  \tau(\vec{\omega}) ^2 F_o(\vec{\omega})$
$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau) R_x dt$	$R_{oi}(\vec{\sigma}') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\vec{\sigma}' + \vec{\sigma}) R_o(\vec{\sigma}) d\vec{\sigma}$

Опуская менее существенные детали и технические особенности преобразования случайных сигналов в пространственных фильтрах, приведем для удобства сопоставления в виде таблицы основные соотношения, характеризующие работу как временных, так и пространственных фильтров.

Присутствующая в таблице функция  $\varphi_s(\vec{\sigma} - \vec{\sigma}')$  определяется выражением

$$\varphi_s(\vec{\sigma} - \vec{\sigma}') = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} s(\vec{\sigma} - \vec{\sigma}' + \vec{\sigma}'') \rho(\vec{\sigma}'') d\vec{\sigma}''.$$

Векторы  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{\sigma}'$ ,  $\vec{\sigma}''$  располагаются либо в плоскости объекта, либо в плоскости изображения.

---

## Литература

1. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1964, 772 с.
2. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. – М.: Наука, 1966, 404 с.
3. О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику. – М.: Мир, 1966, 254 с.
4. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1968, 288 с.
5. Худсон Д. Статистика для физиков. – М.: Мир, 1970, 296 с.
6. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970, 392 с.
7. Дженкинс Г., Ватс Д. Спектральный анализ и его приложения. Том 1, 2. – М.: Мир, 1971, 317 с.
8. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. – М.: Советское радио, 1974, 552 с.
9. Гришин В.К. Статистические методы анализа и планирования экспериментов. – М.: Издательство Московского университета, 1975, 128 с.

10. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976, 496 с.
11. Идье В., Драйард Д., Джеймс Ф., Рус М., Садуле Б. Статистические методы в экспериментальной физике. Пер. с англ. / Под ред. Тяпкина А.А. – М.: Атомиздат, 1976, 335 с.
12. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть 2. Случайные поля. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978, 464 с.
13. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981, 640 с.
14. Баракат Р., Даллас У., Фриден Б., Мерц Л., Педжис Р., Риглер А. Компьютеры в оптических исследованиях. Пер. с англ. / Под ред. Фридена Б. – М.: Мир, 1983, 488 с.
15. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: в двух томах. Т. 1. – М.: Мир, 1983, 312 с.
16. Гудмен Дж. Статистическая оптика. – М.: Мир, 1988, 528 с.
17. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. – М.: Мир, 1989, 376 с.

- 
18. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 1998, 576 с.
  19. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2000, 479 с.
  20. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. – СПб.: Наука, 2001, 295 с.
  21. Палий И.А. Прикладная статистика. – М.: Высшая школа, 2004, 176 с.
  22. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – М.: Айрис-пресс, 2008, 288 с.

## Предметный указатель

- А**
- альтернативная гипотеза. См. конкурирующая гипотеза
  - аналитический сигнал, 152
  - ансамбль, 9
  - аппроксимация, 70
  - асимметрия, 36
- Б**
- белый шум, 109
  - броуновское движение, 107
- В**
- варианта, 63
  - вариационный ряд, 63
  - вероятность, 78
  - время корреляции, 105
  - выборка, 63
  - выборка репрезентативная, 63
  - выборочная функция, 9
- Г**
- генеральная совокупность, 63
  - гипотеза
    - альтернативная, 73
    - конкурирующая, 73
    - нулевая, 73
- Д**
- дисперсия, 16
    - выборочная, 65
    - генеральная, 66
    - исправленная, 67
  - доверительный интервал, 68
  - доверительный уровень, 68
- З**
- закон распределения
    - биномиальный, 27
    - дискретной случайной величины (ряд распределения), 11
    - Пуассона, 27
- И**
- интегральная
    - интенсивность, 134
  - интервальная оценка, 68
- К**
- квантиль, 18
  - квантовый выход, 135

---

ковариация. *См.*

корреляционный момент  
когерентность  
временная, 152  
пространственная, 152  
контраст, 145  
коррелированные величины, 45  
корреляционный момент, 45  
коэффициент  
корреляции, 46, 91  
критерий  
минимума суммы  
квадратов, 71  
*См.* статистический  
критерий, 73  
критическая область, 74  
критические границы, 74  
критические точки, 74

### Л

линейная регрессия, 72  
линия регрессии, 70

### М

математическое ожидание, 15  
медиана, 18  
метод наименьших  
квадратов, 71  
мода, 18

### Н

наблюдаемое значение, 74  
начальные моменты случайной  
величины, 15  
начальный момент  
1-го порядка, 15  
2-го порядка, 15  
некоррелированные  
величины, 45  
несмещенная оценка  
генерального среднего, 65

### О

область  
допустимых значений. *См.*  
область принятия гипотезы  
критическая, 74  
критическая двусторонняя, 75  
критическая  
левосторонняя, 75  
критическая односторонняя, 75  
критическая  
правосторонняя, 75  
принятия гипотезы, 74  
объем генеральной  
совокупности, 63  
отбор  
аритмичный, 148  
естественный, 146

- искусственный, 146
- механический, 148
- пристрастный, 146
- репрезентативный, 147
- случайный, 148
- оценка
  - интервальная, 68
  - несмещенная, 65
  - смещенная, 67
  - точечная, 68
- с независимыми приращениями, 108
- случайный, 78
- со стационарными приращениями, 108
- стационарный в узком смысле, 81
- стационарный в широком смысле, 81
- эргодический, 81

**П**

- передаточная функция, 110
- плотность вероятностей, 13, 79
  - $n$ -мерная, 81
  - безусловная, 54
  - двумерная, 41, 80
  - маргинальная, 54
  - нормальная (гауссовская), 19
  - райсовская, 58
  - совместная, 41
  - условная, 41
- процесс
  - броуновского движения, 108
  - винеровский, 108
  - марковский, 107
  - нормальный (гауссовский), 108

**Р**

- размах, 18
- распределение
  - $F$ -распределение Фишера-Снедекора, 34
  - $t$ -распределение Стьюдента, 34
- Бернулли, 32
- бета-распределение, 32
- биномиальное, 26
- Вейбулла, 34
- гамма-распределение, 33
- Гаусса, 19
- Коши, 33
- Лапласа, 33
- логарифмически нормальное, 22
- Максвелла, 32

- 
- нормальное, 19  
Паскаля, 32  
полимодалное, 18  
Пуассона, 26  
равномерное, 28  
Рэля, 24  
унимодалное, 18  
хи-квадрат-распределение  
  Пирсона, 34  
экспоненциальное, 29  
Эрланга, 33  
регрессия, 70  
ряд  
  вариационный, 63
- С**
- случайные величины, 11  
  дискретные, 11  
  непрерывные, 11  
  целочисленные, 11  
спекл-структура, 62, 142  
спектр  
  энергетический, 104  
среднее  
  выборочное, 63  
  выборочное эмпирическое, 65  
  генеральное, 64  
среднее значение случайной  
  величины, 14
- среднее квадратическое  
  отклонение, 17  
средний квадрат случайной  
  величины, 16  
стандартное отклонение. См.  
  среднее квадратическое  
  отклонение  
статистическая гипотеза, 73  
статистический критерий, 73  
структурная функция, 92  
сумма случайных фазоров, 49
- Т**
- теорема  
  Винера-Хинчина, 104  
  Котельникова, 82, 83  
точечная оценка, 68
- У**
- уравнение регрессии, 70
- Ф**
- фазор, 49  
формула  
  Байеса, 43  
  Бернулли, 27  
фотособытие, 132  
функция  
  автокорреляционная, 88, 89

## Предметный указатель

---

взаимной корреляции, 88, 100  
корреляционная, 88, 97  
передаточная, 110  
плотности распределения  
вероятностей. См. плотность  
вероятностей  
распределения, 12  
распределения вероятностей  
интегральная, 79, 80  
распределения Рэля  
обобщенная, 58  
структурная, 92  
характеристическая, 38  
функция вероятности  
двумерная, 41  
совместная, 41

### Ц

центральная предельная  
теорема, 39  
центральные моменты  
случайной величины, 16

### Ч

частота варианта, 63  
относительная, 63  
число фотоотсчетов, 132

### Ш

ширина  
доверительного интервала, 69  
полосы энергетического  
спектра, 106

### Э

эксцесс, 37  
энергетический спектр, 104