

## Глава 4. Восприимчивость двухуровневой системы [3-6]

### 4.1. Поглощение и дисперсия

Фундаментальную роль в теории взаимодействия излучения с веществом играет физическая величина, называемая восприимчивостью. Она определяет связь между напряженностью поля электромагнитной волны и поляризацией. Выражение для восприимчивости можно получить исходя из уравнений (3.2.12), (3.2.14) и (3.2.15).

Считая, что электромагнитное поле представляет собой бегущую волну

$$E = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{E}} e^{i(\omega t - kz)} + \text{K.C.}, \quad (4.1.1)$$

будем искать решение уравнения (3.2.13) в виде

$$P = \frac{1}{2} \tilde{P} e^{i(\omega t - kz)} + \text{K.C.}. \quad (4.1.2)$$

Здесь тильда ( $\sim$ ) обозначает комплексную амплитуду, а сокращение К.С. – комплексно-сопряженную величину. Подставляя (2) в уравнение (3.2.13) и используя условия близости к резонансу  $\omega \approx \omega_{21}$ , получаем следующее выражение для амплитуды поляризации:

$$\tilde{P} = \frac{|\mu_{12}|^2 LN}{\hbar} \frac{1}{(\omega_{21} - \omega) + i(1/T_2)} \tilde{\mathcal{E}}. \quad (4.1.3)$$

В (3) разность ( $N_1 - N_2 = N$ ) можно считать не зависящей от времени. Это следует из уравнения (3.2.14), анализ которого показывает, что высокочастотные компоненты  $N$  малы по сравнению с постоянной составляющей, так как  $\omega T_1 \gg 1$ .

Определяя восприимчивость среды  $\chi(\omega)$  посредством соотношения

$$\tilde{P} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \tilde{\mathcal{E}}, \quad (4.1.4)$$

с помощью (3) получаем для нее следующее выражение:

$$\chi(\omega) = \frac{\pi}{\hbar \varepsilon_0} L \mu_{12}^2 N \tilde{g}_L(\omega, \omega_{21}). \quad (4.1.5)$$

Функция

$$\begin{aligned} \tilde{g}_L(\omega, \omega_L) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{(\omega_{21} - \omega) + i(1/T_2)} = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(\omega_{21} - \omega)}{(\omega_{21} - \omega)^2 + (1/T_2)^2} - i \frac{1}{\pi} \frac{1/T_2}{(\omega_{21} - \omega)^2 + (1/T_2)^2} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

известна как комплексная функция Лоренца.

Как видно из последних уравнений, в восприимчивости можно выделить действительную и мнимую части, придав ей вид

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega), \quad (4.1.7)$$

где

$$\chi'(\omega) = \frac{\pi}{\hbar\epsilon_0} L\mu_{12}^2 N \left[ \frac{1}{\pi} \frac{(\omega_{21} - \omega)}{(\omega_{21} - \omega)^2 + (1/T_2)^2} \right], \quad (4.1.8)$$

$$\chi''(\omega) = -\frac{\pi}{\hbar\epsilon_0} L\mu_{12}^2 N \left[ \frac{1}{\pi} \frac{1/T_2}{(\omega_{21} - \omega)^2 + (1/T_2)^2} \right]. \quad (4.1.9)$$

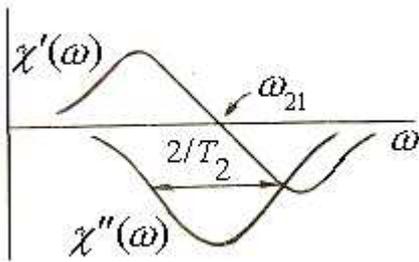


Рис.4.1. Зависимость  $\chi'$  и  $\chi''$  от частоты  $\omega$ .

Качественные графики действительной  $\chi'(\omega)$  и мнимой  $\chi''(\omega)$  частей восприимчивости приведены на рис.4.1.

Перейдем теперь к выяснению физического смысла величин  $\chi'(\omega)$  и  $\chi''(\omega)$ . Обратимся к волновому уравнению (3.2.11). Используя представления (1), (2), (4), (5), с помощью этого уравнения можно получить для константы распространения  $k$  следующее выражение:

$$k^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \left[ 1 + \chi(\omega) / n^2 \right] \quad (4.1.10)$$

Это выражение преобразуется к виду

$$k = k' + ik'' \approx \frac{n\omega}{c} \left[ 1 + \frac{\chi'(\omega)}{2n^2} \right] + i \frac{\omega\chi''(\omega)}{2nc}. \quad (4.1.11)$$

Откуда видно, что действительная часть  $k$ , определяющая дисперсионные свойства среды, зависит от  $\chi'(\omega)$ . Так как фазовая скорость волны

$$v_{\Phi} = \omega / k', \quad (4.1.12)$$

то из (11) видно, что фазовая скорость равна приблизительно  $c/n$ , с некоторой, как правило, небольшой добавкой. Эта добавка быстро изменяется вблизи частоты перехода  $\omega_{21}$  и определяет область аномальной дисперсии.

Мнимая часть  $k$ , как известно, описывает поглощение в среде. Она зависит от величины  $\chi''(\omega)$ . Поскольку усредненная во времени мощность электромагнитной волны

$$I = n\varepsilon_0 c \left| \tilde{\mathcal{E}} e^{ikz} \right|^2 / 2, \quad (4.1.13)$$

то закон ее изменения будет иметь вид

$$I = I_0 e^{-\kappa z}, \quad (4.1.14)$$

где коэффициент поглощения,  $\kappa = -2k''$ ,  $I_0$  – мощность при  $z = 0$ . С помощью выражения (9) находим, что

$$\kappa = \frac{\omega_{21} \pi \mu_{12}^2}{\hbar \varepsilon_0 c n} L N g_L(\omega, \omega_{21}). \quad (4.1.15)$$

Здесь  $g_L(\omega, \omega_{21})$  – лоренцева функция формы линии, равная

$$g_L(\omega, \omega_{21}) = \frac{1}{\pi} \frac{1/T_2}{(\omega_{21} - \omega)^2 + (\Delta\omega_L/2)^2} \quad (4.1.16)$$

Ее график приведен на рис.4.2. Ширина линии  $\Delta\omega_L$  связана с временем поперечной релаксации  $T_2$  соотношением

$$\Delta\omega_L = 2/T_2$$

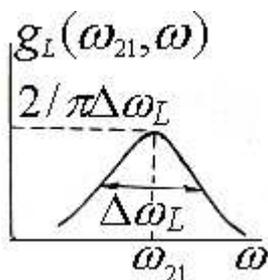


Рис.4.2 Лоренцова форма линии

Как видно из (15), коэффициент  $\kappa$  пропорционален разности заселенностей уровней ( $N_1 - N_2$ ). Если заселенность верхнего уровня выше ( $N_2 > N_1$ ), то коэффициент  $\kappa$  становится отрицательным. Это характерно для усиливающих лазерно-активных сред.

## 4.2. Однородное и неоднородное уширение

Проведенное в предыдущем параграфе рассмотрение относится к так называемой однородно уширенной линии, имеющей лоренцеву форму. Термин "однородное уширение" применяется в связи с тем, что взаимодействующая с излучением среда считается состоящей из абсолютно идентичных атомов. Полная макроскопическая поляризация определяется

тем самым просто суммой однородного ряда вкладов от отдельных атомов, каждый из которых имеет одну и ту же частоту перехода и ширину линии. Однородно уширенная линия обусловлена релаксационными процессами, которые действуют одинаково на все атомы. Такими процессами могут быть столкновения между атомами, взаимодействие с колебаниями решетки и некоторые другие.

В тех случаях, когда из-за различия частот переходов в атомах происходит уширение линии, принято говорить о неоднородном уширении. Неоднородное уширение наблюдается в газах, так как из-за движения молекул происходит доплеровский сдвиг частот оптических переходов. Неоднородное уширение линий может иметь место и в линиях примесных ионов в силу несовершенства кристаллов и стекол, в которых они размещены. Если изменения частот переходов в атомах имеют часто встречающееся гауссово статистическое распределение, то неоднородно уширенная линия будет иметь гауссову форму.

При неоднородном уширении отдельные атомы имеют однородно уширенные линии, которые намного уже полной ширины линий всей совокупности атомов. Группу атомов с частотами переходов, лежащих в интервале, равном ширине однородно уширенной линии  $\Delta\omega$ , называют однородным пакетом. Иногда по отношению к такому пакету применяют используемый в теории парамагнетизма термин "спиновый". Если вся совокупность атомов взаимодействует с электромагнитным полем. То поляризация среды находится суммированием независимых вкладов отдельных однородных пакетов. Полная же форма неоднородно уширенной линии определяется суперпозицией линий однородных пакетов. Это иллюстрирует рис.4.3, где изображены контуры неоднородно уширенной линии и отдельного однородного пакета.

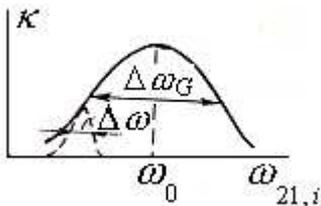


Рис.4.3. Форма неоднородно уширенной линии. Непрерывная кривая – огибающая линии; пунктир – однородный пакет.

Рассмотрим на примере газовой среды вопрос спектральной характеристике восприимчивости при неоднородном уширении линии. В газе для произвольной  $i$ -й молекулы, имеющей направленную противоположно распространению волны компоненту скорости  $v_i$ , частота взаимодействия будет равна

$$\omega_{21,i} = \omega_0(1 + v_i / c). \quad (4.2.1)$$

Здесь  $\omega_0$  – частота перехода, соответствующая неподвижной молекуле.

Из газовой кинетики известно, что при максвелловском распределении молекул по скоростям число молекул  $dM$  в полосе частот перехода  $d\omega_{21,i}$  равно

$$dM = N_V g_G(\omega_{21,i}, \omega_0) d\omega_{21,i}, \quad (4.2.2)$$

где  $N_V$  – число молекул в единице объема,  $g_G(\omega_{21,i}, \omega_0)$  – гауссова функция формы линии равная

$$g_G(\omega_{21,i}, \omega_0) = \frac{\sqrt{(4/\pi) \ln 2}}{\Delta\omega_G} \exp\left[-4 \ln 2 \frac{(\omega_{21,i} - \omega_0)^2}{(\Delta\omega_G)^2}\right]. \quad (4.2.3)$$

Величина  $\Delta\omega_G$  определяет ширину линии по уровню, соответствующего половине максимального поглощения.

Если поле  $E$  приложено к газу, то любой однородный пакет будет давать на частоте  $\omega$  вклад в наводимую поляризацию, равный

$$d\tilde{P} = \varepsilon_0 \tilde{\mathcal{E}} d\chi(\omega_{21,i}, \omega). \quad (4.2.4)$$

Величину  $d\chi$  можно найти, используя (4.1.5), учитывая при этом, что число молекул в пакете равно  $dM = N_V g_G(\omega_{21,i}, \omega_0) d\omega_{21,i}$ . Тем самым

$$d\chi(\omega, \omega_{21,i}) = \frac{\pi}{\hbar\varepsilon_0} L\mu_{12}^2 N \tilde{g}_L(\omega, \omega_{21,i}) g_G(\omega_{21,i}, \omega_0) d\omega_{21,i}. \quad (4.2.5)$$

Интегрированием (5) по всему диапазону переходов  $\omega_{21,i}$  находим полную восприимчивость

$$\chi(\omega) = \frac{\pi}{\hbar\varepsilon_0} L\mu_{12}^2 N \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_L(\omega, \omega_{21,i}) g_G(\omega_{21,i}, \omega_0) d\omega_{21,i}. \quad (4.2.6)$$

Вычисление интеграла (6) упрощается, если предположить, что ширина однородного пакета значительно уже ширины гауссовой линии. Для этого случая восприимчивость становится равной

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega), \quad (4.2.7)$$

где

$$\chi''(\omega) = -\frac{\pi}{\hbar\varepsilon_0} L\mu_{12}^2 N g_G(\omega, \omega_0), \quad (4.2.8)$$

$$\chi'(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega_{21,i})}{\omega_{21,i} - \omega} d\omega_{21,i}. \quad (4.2.9)$$

Символ  $P$  перед интегралом в последнем выражении означает, что он берется в смысле главного значения. В случае узких однородных пакетов, как видно из выражения (8), поглощение неоднородно уширенной линии определяется зависимостью. Аналогичной той, которая справедлива для линии с однородным уширением (см.(8)); отличие состоит лишь в различии форм-

факторов линий. Из выражения (9) следует, что дисперсия может быть определена по поглощению с помощью интеграла свертки.

Заметим, что приведенная выше связь между действительной и мнимой частями восприимчивости имеет достаточно общий характер и может быть строго обоснована с помощью теории функций комплексного переменного. Формулы (8) и (9) являются частным случаем известных соотношений Крамерса-Кронига, согласно которым

$$\chi'(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (4.2.10)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (4.2.11)$$

Важно отметить, что эти соотношения справедливы как для однородно, так и неоднородно уширенных линий.

### 4.3. Эффекты насыщения

Если интенсивность световой волны, взаимодействующей с веществом, достаточно велика, то энергия, передаваемая двухуровневым микросистемам, не успевает рассеиваться вследствие релаксационных процессов. Это влечет существенное изменение заселенностей уровней, так что в поглощении и дисперсии среды начинают проявляться эффекты насыщения. Воспользуемся уравнением (3.2.14). Выделим в левой и правой частях этого уравнения члены, не зависящие от времени, и приравняем их друг другу:

$$\frac{\hbar\omega_{21}}{2} \frac{N - N_0}{T_1} = -\frac{i\omega}{4} (\tilde{P} \tilde{\mathcal{E}} * -\tilde{P} * \tilde{\mathcal{E}}). \quad (4.3.1)$$

Так как

$$\tilde{P} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \tilde{\mathcal{E}} = \varepsilon_0 (\chi'(\omega) + i\chi''(\omega)) \tilde{\mathcal{E}}, \quad (4.3.2)$$

то (1) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\hbar\omega_{21}}{2} \frac{N - N_0}{T_1} = \frac{1}{2} \omega_{21} \chi''(\omega) |\tilde{\mathcal{E}}|^2. \quad (4.3.3)$$

Используя (4.1.9), перепишем (3) в виде

$$N = \frac{N_0}{1 + I g_L(\omega, \omega_{21}) \pi / I_{нас} T_2}. \quad (4.3.4)$$

Здесь  $I = n\varepsilon_0 c |\tilde{\mathcal{E}}|^2 / 2$  – плотность мощности,  $I_{нас}$  – параметр насыщения, определяемый формулой

$$I_{нас} = \frac{n\varepsilon_0 c}{(2T_1 T_2 / \hbar^2) L \mu_{12}^2}. \quad (4.3.5)$$

Параметр насыщения численно равен плотности мощности, при которой разность заселенностей уменьшается вдвое. С помощью выражений (4) и (4.1.15) найдем зависимость от частоты и плотности мощности коэффициента поглощения

$$\kappa = \frac{\omega_{21} \pi L \mu_{12}^2}{\hbar \varepsilon_0 c n} N_0 \left[ \frac{1/T_2}{\pi [(\omega_{21} - \omega)^2 + (1/T_2)^2 (1 + I/I_{нас})]} \right]. \quad (4.3.6)$$

Эту зависимость характеризуют графики на рис.4.4. Важно отметить, что наряду с ростом плотности мощности происходит не только уменьшение максимального поглощения (при  $\omega = \omega_{21}$ ), но и уширение линии. Зависимость ширины линии поглощения от плотности мощности задается формулой

$$\Delta\omega_L = \Delta\omega_{ненас} \sqrt{1 + I/I_{нас}}, \quad (4.3.7)$$

где  $\Delta\omega_{ненас}$  – ширина линии при  $I=0$ .

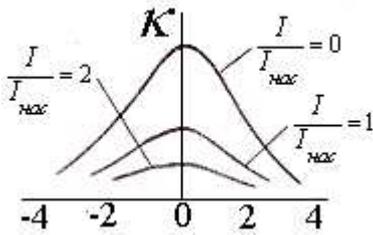


Рис.4.4. Изменение контура поглощения с ростом мощности излучения.

Из выражения (6) следует, что поглощаемая в единице объема мощность

$\mathfrak{R} = \kappa I$  с ростом  $I$  насыщается и не превышает в резонансе уровня

$$\mathfrak{R}_{нас} = \frac{\hbar \omega_{21}}{2} \frac{N_0}{T_1} = \kappa_{ненас} I_{нас}, \quad (4.3.8)$$

$\kappa_{ненас}$  – коэффициент поглощения при  $I=0$ . Поскольку при  $I \gg I_{нас}$  среда не может больше поглощать, то соответствующий оптический переход называют просветленным. При просветлении любая дополнительная мощность, передаваемая волне, будет проходить через среду не поглощаясь.

Своеобразное проявление просветления среды имеет при прохождении через нее короткого импульса с высокой напряженностью поля. Этот эффект мы проанализируем в следующем параграфе.

#### 4.4. Солитоны

При резонансном распространении импульса монохроматического излучения длительностью много короче времен релаксации можно наблюдать явление самоиндуцированной прозрачности. Оно состоит в том, что для импульса с определенной площадью поглощение исчезает и среда

становится прозрачной. Если при этом импульс, распространяясь в веществе, сохраняет свою форму, то говорят о распространении солитона.

Проанализируем особенности солитонного распространения света, исходя из волнового уравнения. Перепишем его в системе СГСЕ, считая, что проводимость среды  $\delta$  равна нулю

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = \frac{4\pi}{c^2} \ddot{P}. \quad (4.4.1)$$

Поле светового импульса зададим в виде

$$E(t, z) = \mathcal{E}(t, z) \cos(\omega t - kz). \quad (4.4.2)$$

Огибающую импульса  $\mathcal{E}(t, z)$  будем считать медленно изменяющейся как по времени, так и по координате  $z$ . Условие медленности огибающей сводится к двум соотношениям

$$|\partial \mathcal{E} / \partial t| \ll \omega |\mathcal{E}|, \quad \partial \mathcal{E} / \partial z \ll \frac{|\mathcal{E}|}{\lambda}. \quad (4.4.3)$$

С использованием (3) уравнение (1) может быть преобразовано к виду

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}(z, t) = -2\pi \frac{\omega}{c} N \mu_{12} \sin \theta(z, t), \quad (4.4.4)$$

где в отличие от (2.5.8)

$$\theta(z, t) = \frac{\mu_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(z, t) dt. \quad (4.4.5)$$

Будем искать решение уравнения (4), считая, что

$$\theta(z, t) = \theta(z - vt), \quad (4.4.6)$$

$$\mathcal{E}(z, t) = \mathcal{E}(z - vt) = \frac{\hbar}{\mu_{12}} \frac{\partial \theta(z - vt)}{dt}. \quad (4.4.7)$$

Произведем замену переменных

$$\varphi = z - vt, \quad (4.4.8)$$

с учетом которой (7) примет вид

$$\mathcal{E}(z, t) = -v \frac{\hbar}{\mu_{12}} \frac{\partial}{d\varphi} \theta(\varphi). \quad (4.4.9)$$

Подставляя (9) в (4), получаем

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} = \frac{2\pi N \omega \mu_{12}^2}{v(c-v)\hbar} \sin \theta. \quad (4.4.10)$$

Последнее уравнение аналогично уравнению физического маятника (параметр  $\theta$  – аналог угла отклонения от положения равновесия). Если положить квадрат "частоты" колебаний  $f^2$  равным

$$f^2 = \frac{2\pi N\omega\mu_{12}^2}{\nu(c-\nu)\hbar}, \quad (4.4.11)$$

то (10) можно записать в форме

$$\theta''_{\varphi\varphi} = f^2 \sin \theta. \quad (4.4.12)$$

Уравнение (12) является частным случаем известного в теории колебаний синус-уравнения Гордона. Его решение имеет вид

$$\theta = 4\text{arctge}^{\lambda\varphi}. \quad (4.4.13)$$

После дифференцирования получаем:

$$\theta' = 4\lambda e^{\lambda\varphi} / (1 + e^{2\lambda\varphi}), \quad (4.4.14)$$

$$\theta''_{\varphi\varphi} = \lambda^2 \sin(4\text{arctge}^{\lambda\varphi}). \quad (4.4.15)$$

Последнее выражение с учетом (13) удовлетворяет уравнению (12) при  $\lambda=f$ . Сопоставляя (9) и (14), легко установить, что

$$\mathcal{E}(\varphi) = 8fv \frac{\hbar}{\mu_{12}} \text{sch}(\varphi). \quad (4.4.16)$$

Как видно из (16), секанс-гиперболическая огибающая импульса, удовлетворяющего автономному представлению (6), имеет симметричную колоколообразную форму. Используя (8) и (11), перепишем (16) в виде

$$\mathcal{E}(z - vt) = 8\sqrt{\frac{2\pi\nu N\hbar\omega}{c-\nu}} \text{sch} \left[ \frac{\mu_{12}}{\hbar} (z - vt) \sqrt{\frac{2\pi N\hbar\omega}{\nu(c-\nu)}} \right]. \quad (4.4.17)$$

Заметим, что (17) описывает  $2\pi$ -импульс, так как  $\theta(+\infty) - \theta(-\infty) = 2\pi$ . Таким образом,  $2\pi$ -импульс, описываемый выражением (17), может распространяться в среде без затухания и изменения формы. При этом среда после прохождения импульса остается в основном состоянии. Импульсы, обладающие такими свойствами, принято называть солитонами, а само явление их распространения называют эффектом самоиндуцированной прозрачности.

При распространении солитона в среде под действием его переднего фронта атомы переходят из нижнего состояния в верхнее. Затем под действием хвостовой части солитона атомы когерентно излучают, передавая

энергию поля. Поскольку площадь импульса равна  $2\pi$ , поглощение и переизлучение оказываются строго сбалансированы. Если площадь импульса равна  $2\pi m$  ( $m$  – целое положительное число), то такой импульс не может распространяться в среде, сохраняя форму. По мере распространения в среде он разобьется на  $m$  солитонов, площадь каждого из которых будет равна  $2\pi$ .

Экспериментально эффект самоиндуцированной прозрачности легко наблюдается в большом числе молекулярных газов ( $SF_6$ ,  $BCl_2$  и т.п.), имеющих линии поглощения на длинах волн генераций  $CO_2$ -лазера.

#### 4.5. Насыщение усиления в системе вырожденных уровней

В ходе вышеприведенного анализа предполагалось, что энергетические уровни рассматриваемой двухуровневой системы являются невырожденными. Рассмотрим, как повлияет на характер полученных зависимостей наличие вырождения. Будем считать, что имеется  $g_1$  собственных состояний атома с энергией  $E_1$  и  $g_2$  собственных состояний с энергией  $E_2$  (рис.4.5). Модель вырожденных состояний включает в себя и случай, когда уровни отдельных состояний не точно вырождены, а отстоят друг от друга на расстояние, малое по сравнению с шириной полосы возбуждающего излучения и по сравнению с величиной  $kT$  ( $k$  – постоянная Больцмана). По существу такие системы уровней формируют энергетические зоны. Это позволяет распространить весь нижеприведенный анализ и на процессы взаимодействия излучения. При малом расстоянии между уровнями в зоне действующие в реальных системах быстрые кросс-релаксационные процессы между вырожденными состояниями выравнивают заселенности уровней. Благодаря этому, независимо от того, какие состояния участвуют в переходах, внутренние релаксационные процессы поддерживают распределение  $N_i = N_1 / g_1$  и  $N_j = N_2 / g_2$ , где  $N_i$  и  $N_j$  – заселенности уровней,

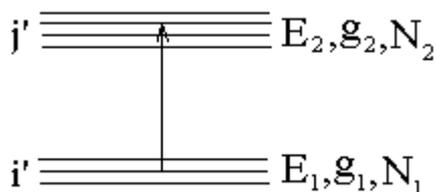


Рис. 4.5. Двухуровневая система с вырожденными верхним и нижним уровнями.

участвующих в поглощении светового кванта,  $N_1$  и  $N_2$  – полное число атомов или молекул в единице объема соответственно на нижних и верхних уровнях.

Построим вначале уравнения, характеризующие изменения  $N_1$  и  $N_2$ , для невырожденного случая. Учитывая, что  $N_1 + N_2 = N_V$ , где  $N_V$  – постоянная величина, из (3.2.14) можно получить следующие уравнения:

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + \frac{N_1 - N_1^0}{T_1} = \frac{1}{\hbar\omega_{21}} \dot{\overline{P}}\overline{E}, \quad (4.5.1)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{N_2 - N_2^0}{T_1} = \frac{1}{\hbar\omega_{21}} \dot{\overline{P}}\overline{E}. \quad (4.5.2)$$

В вырожденном случае вид уравнения (1) изменится:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{N_i - N_i^0}{T_1} = -\frac{1}{\hbar\omega_{21}} \frac{1}{g_1} \sum_{i=1}^{g_1} \sum_{j=1}^{g_2} \dot{\overline{P}}_{ij} \overline{E} = -\frac{1}{\hbar\omega_{21}} \frac{1}{g_1} \dot{\overline{P}}\overline{E}. \quad (4.5.3)$$

Структура правой части уравнения (3) обусловлена тем, что при наличии кросс-релаксации заселенность состояния  $i$  изменяется в результате всех переходов между уровнями 1 и 2; фактически это изменение равно  $1/g_1$ , части полного изменения заселенности уровня 1. Распространяя подобные рассуждения на уровень  $j$ , после подстановки  $N_i = N_1/g_1$  и  $N_j = N_2/g_2$  будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{N_1}{g_1} + \frac{N_1/g_1 - N_1^0/g_1}{T_1} = -\frac{1}{\hbar\omega_{21}} \frac{1}{g_1} \dot{\overline{P}}\overline{E}, \quad (4.5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{N_2}{g_2} + \frac{N_2/g_2 - N_2^0/g_2}{T_1} = -\frac{1}{\hbar\omega_{21}} \frac{1}{g_2} \dot{\overline{P}}\overline{E}. \quad (4.5.5)$$

Вычитая из (4) уравнение (5), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{N_1}{g_1} - \frac{N_2}{g_2} \right) + \frac{(N_1/g_1 - N_2/g_2) - (N_1/g_1 - N_2/g_2)^0}{T_1} = -\frac{1}{\hbar\omega_{21}} \left( \frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2} \right) \dot{\overline{P}}\overline{E} \quad (4.5.6)$$

Этим уравнением следует пользоваться вместо уравнения (3.2.14) в тех случаях, когда имеет место вырождение уровней.

Если исходить из уравнения (6), то выражение (4.3.4), определяющее разность заселенностей при наличии насыщающего поля, примет вид

$$N_1/g_1 - N_2/g_2 = \frac{(N_1/g_1 - N_2/g_2)^0}{1 + \frac{I}{I'_{нас}} \frac{g_L(\omega, \omega_{21})}{T_2/\pi}}. \quad (4.5.7)$$

Входящий в (7) параметр насыщения  $I'_{нас}$  связан с аналогичным параметром, задаваемым (4.3.5), соотношением

$$I'_{нас} = \frac{2I_{нас}}{\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2}\right)}. \quad (4.5.8)$$

В тех случаях, когда между подуровнями в зонах отсутствуют кросс-релаксационные процессы, анализ процессов взаимодействия световой волны с системой зона-зона следует проводить, используя подход, основанный на применении уравнений (2.3.11), (2.3.12). Записывая эти уравнения для каждого подуровня нижней и верхней зон, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\psi}_n &= \hbar\Delta_n\psi_n + \sum_k \mu_{nk} E_0\psi_k / 2, \\ i\hbar\dot{\psi}_k &= \hbar\Delta_k\psi_k + \sum_n \mu_{kn} E_0\psi_n / 2. \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Индекс  $n$  относится к нижнему подуровню, индекс  $k$  – к верхнему. Несмотря на сложность системы (9), в настоящее время на основе так называемой диаграммной техники разработаны эффективные методы ее решения. Используя их, можно определить величины  $\psi_n$  и  $\psi_k$ , а затем и заселенности соответствующих подуровней. Суммируя эти заселенности, несложно определить и заселенности зон. Поскольку получающиеся выражения для заселенностей зон весьма сложны, мы ограничимся приведением выражения для разности заселенностей зон, сформированных вырожденными состояниями. Для случая, когда каждая зона состоит из  $g$  подуровней справедливо выражение

$$N_1 - N_2 = \frac{\mathfrak{F}_1\left(2\frac{\mu E_0}{\hbar} g^{1/2} t\right)}{\frac{\mu E_0}{\hbar} g^{1/2} t}. \quad (4.5.10)$$

Из него следует, что при  $t \rightarrow \infty$  ( $N_1 - N_2$ )  $\rightarrow 0$ . Этот результат в системе с релаксацией мы получаем, когда  $I \rightarrow \infty$  (см. (4.5.7)).

## 4.6. Нелинейная поляризация среды и нелинейные оптические явления

С увеличением интенсивности связь между напряженностью электрического поля световой волны и поляризацией среды распространения перестает быть линейной и может быть представлена в виде

$$P = \chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots, \quad (4.6.1)$$

где величина  $\chi^{(1)} = \varepsilon_0 \chi$  характеризует линейную восприимчивость, величины  $\chi^{(2)}$ ,  $\chi^{(3)}$  и т. д. – нелинейные восприимчивости второго, третьего и т.д. порядков.

Предположим, что на среду падает волна  $E = E_0 \cos(\omega t - k_1 z)$ , где  $k_1 = (\omega/c)n$  – волновое число. Тогда будет справедливым выражение

$$P = \chi^{(1)} E_0 \cos(\omega t - k_1 z) + \chi^{(2)} E_0^2 \cos^2(\omega t - k_1 z) + \chi^{(3)} E_0^3 \cos^3(\omega t - k_1 z) + \dots \quad (4.6.2)$$

Первый член в правой части выражения (2) характеризует обычное переизлучение падающей волны на частоте  $\omega$ . Физический смысл второго члена становится понятным, если его записать в виде

$$P_{н/л} = \chi^{(2)} E_0^2 \cos^2(\omega t - k_1 z) = \frac{1}{2} \chi^{(2)} E_0^2 + \frac{1}{2} \chi^{(2)} E_0^2 \cos(2\omega t - 2k_1 z). \quad (4.6.3)$$

Как следует из (3), выражение для рассматриваемой части поляризации состоит из двух слагаемых – постоянного и меняющегося с удвоенной частотой. Наличие первого слагаемого указывает на процесс выпрямления (детектирования)

высокочастотного электромагнитного поля световой волны. Второе слагаемое относится к процессу генерации второй гармоники падающего излучения.

Третий член в (2) может быть преобразован следующим образом:

$$P^{(3)} = \chi^{(3)} E_0^3 \cos^3(\omega t - k_1 z) = \frac{3}{4} \chi^{(3)} E_0^2 E_0 \cos(\omega t - k_1 z) + \frac{\chi^{(3)} E_0^2}{4} E_0 \cos 3(\omega t - k_1 z). \quad (4.6.4)$$

Последнее слагаемое в (4) указывает на присутствие в преобразованном излучении третьей гармоники. Первое же слагаемое определяет нелинейность показателя преломления среды распространения. Убедиться в этом можно, объединив это слагаемое с первым слагаемым в (2). Это дает возможность определить поляризацию среды  $P$  и ее показатель преломления  $n$  для частоты  $\omega$

$$P = \varepsilon_0 \chi E + \chi^{(3)} E^3. \quad (4.6.5)$$

Используя известную связь между электрической индукцией  $D$  и поляризацией  $P$

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 E + P = \left[ \varepsilon_0 (1 + \chi) + \frac{3}{4} \chi^{(3)} E^2 \right] E, \quad (4.6.6)$$

можно найти диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi) + \frac{3}{4}\chi^{(3)}E^2 \quad (4.6.7)$$

и соответствующий показатель преломления  $n$

$$n = \sqrt{\varepsilon / \varepsilon_0} = \sqrt{1 + \chi + \frac{3}{4}\chi^{(3)}E^2 / \varepsilon_0} \approx \sqrt{1 + \chi} \left(1 + \frac{\frac{3}{4}\chi^{(3)}E^2}{2\varepsilon_0(1 + \chi)}\right). \quad (4.6.8)$$

При последнем преобразовании учтено, что нелинейная поправка к показателю преломления много меньше единицы. Усредняя квадрат напряженности поля по периоду колебаний, (8) можно привести к виду

$$n = n_0 + n_2 E_0^2. \quad (4.6.9)$$

Здесь  $n_0$  определяет линейный показатель преломления;  $n_2 E_0^2$  описывает нелинейную поправку к показателю преломления.

Зависимость показателя преломления среды от интенсивности светового пучка приводит к эффектам самовоздействия излучения. Так, если распределение интенсивности в пучке описывается гауссовой функцией (такое распределение характерно для лазерных пучков), то можно наблюдать явления самофокусировки и дефокусировки пучка. Это связано с тем, что знак поправки в (9) может быть как положительным, так и отрицательным. Если нелинейная поправка положительна, то скорость движения периферийных участков пучка больше, чем центральных. В результате изначально плоский волновой фронт становится вогнутым в сторону распространения пучка и происходит его фокусировка. Если нелинейная поправка отрицательна, то участки вблизи оси двигаются быстрее и волновой фронт становится выпуклым. Это приводит к дефокусировке пучка. При определенных поперечных размерах пучка и его мощности процессы самофокусировки пучка и его дефокусировки могут уравновесить друг друга. Тогда будет наблюдаться самоканалирование пучка, при котором сечение пучка остается неизменным. Описанные процессы самовоздействия излучения можно наблюдать в газах, жидкостях и твердых телах.

## Глава 5. Анализ квантовых переходов в различных порядках теории возмущений [1,9,10]

Выше проведенное рассмотрение оптических переходов в атомных системах осуществлялось преимущественно в рамках двухуровневой модели с использованием резонансного приближения. В настоящей главе квантовые переходы в атомах будут рассмотрены в более общем виде без использования указанных допущений.

### 5.1. Определение вероятности перехода методом последовательных приближений

Вернемся к теории нестационарных возмущений, элементы которой изложены в параграфе 1.2. Будем считать воздействующее на вещество поле слабым, а его частоту заметно отличающейся от частоты оптического перехода. Отказ от двухуровневой модели требует возврата к анализу системы уравнений (1.2.11). Она является точной, поскольку полностью эквивалентна исходному уравнению (1.2.1). Однако решение этой системы представляет собой весьма сложную задачу. Мы воспользуемся тем, что воздействие на атомную систему является слабым. Если при  $t \leq 0$ , система находилась в состоянии  $\Psi_n$ , то все коэффициенты  $a_{nk}$  были равны нулю, кроме коэффициента

$$a_{nn}(0) = \delta_{kn}. \quad (5.1.1)$$

Будем считать, что при  $t > 0$  (с момента включения поля) из-за слабости воздействия возмущенная функция системы  $\Psi_n^e$  мало отличается от  $\Psi_n$  и очень медленно меняется с течением времени. Это позволяет представить коэффициенты  $a_{nk}$  в виде

$$a_{nk} = a_{nk}^{(0)}(t) + a_{nk}^{(1)}(t) + a_{nk}^{(2)}(t) + \dots, \quad (5.1.2)$$

где

$$a_{nk}^{(0)}(t) = a_{nn}(0) = \delta_{kn}.$$

Коэффициент  $a_{nk}^{(1)}$  имеет тот же порядок малости, что и возмущение; порядок малости коэффициента  $a_{nk}^{(2)}(t)$  определяется квадратом возмущения и т.д. Подставляя (2) в (1.2.11), получаем

$$i\hbar \frac{da_{nm}^{(1)}}{dt} = \sum_k \langle m | \hat{V} | k \rangle e^{i\omega_{mk}t} a_{nk}^{(0)} = \langle m | \hat{V} | n \rangle e^{i\omega_{mn}t}. \quad (5.1.3)$$

(выражение (3) получено в пренебрежении членами второго и более высокого порядка малости по возмущению). Интегрируя (3), имеем:

$$a_{nm}^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \langle m | \hat{V} | n \rangle e^{i\omega_{mn}t} dt. \quad (5.1.4)$$

Аналогичным образом могут быть найдены и поправки более высокого порядка малости. Так,

$$a_{nm}^{(2)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_k \int_0^\tau \langle m | \hat{V} | k \rangle e^{i\omega_{mk}t} a_{nk}^{(1)} dt. \quad (5.1.5)$$

Учитывая коэффициенты разложения в (1.2.2) с добавками все более высокого порядка малости, можно с любой степенью точности определить волновую функцию  $\Psi_n^e$ . Одновременно с заданной точностью можно определить и отнесенную к единице времени вероятность перехода из состояния  $n$  в состояние  $m$

$$\omega_{nm} = \frac{1}{\tau\hbar^2} \left| \sum_k \int_0^\tau (a_{nk}^{(1)} + a_{nk}^{(2)} + a_{nk}^{(3)} + \dots) \langle m | \hat{V} | k \rangle \times \exp(i\omega_{nk}t) dt \right|^2. \quad (5.1.6)$$

## 5.2. Переходы в «размытые» состояния в первом порядке теории возмущений

Гармоничное возмущение, обусловленное световой волной, может быть представлено в виде

$$\hat{V}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \hat{h}(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}), & t > 0 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

где  $\hat{h}$  – независящий от времени оператор. Определим отнесенную к единице времени вероятность перехода из состояния  $n$  в состояние  $m$  в первом порядке теории возмущений

$$\begin{aligned} \omega_{nm}^{(1)} &= |a_{nm}^{(1)}(\tau)|^2 / \tau = \frac{1}{\tau\hbar^2} \left| \int_0^\tau \langle m | \hat{V}(t) | n \rangle e^{i\omega_{mn}t} dt \right|^2 = \\ &= \frac{1}{\tau\hbar^2} \left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|^2 \left| \frac{\exp[i(\omega_{mn} - \omega)\tau] - 1}{\omega_{mn} - \omega} + \frac{\exp[i(\omega_{mn} + \omega)\tau] - 1}{\omega_{mn} + \omega} \right|^2. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Первое слагаемое в (2) относится к переходу с системы на более высокие уровни и соответствует поглощению, второе – переходу на более низкие и соответствует излучению.

Если ограничиться лишь процессами поглощения, (2) преобразуется к виду

$$\omega_{nm}^{(1)} = \frac{\pi}{\hbar^2} \left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|^2 f(\alpha, \tau), \quad (5.2.3)$$

где

$$f(\alpha, \tau) = \sin^2(\alpha, \tau) / \pi \alpha^2 \tau, \quad \alpha = (\omega_{mn} - \omega) / 2. \quad (5.2.4)$$

График функции  $f(\alpha, \tau)$  приведен на рис.5.1. В резонансном случае, когда  $\omega = (E_m - E_n) / \hbar$  и конечное состояние является дискретным, т.е. характеризуется определенной энергией  $E_m$ ,  $\alpha=0$  и  $f(\alpha, \tau)=\tau/\pi$ . С учетом этого

$$\omega_{nm}^{(1)} = (\tau / \hbar^2) \left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|^2. \quad (5.2.5)$$

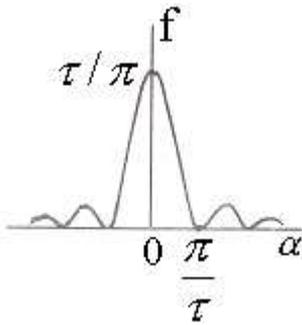


Рис.5.1. График функции  $f(\alpha, \tau)$ .

Видно, что с увеличением  $\tau$  вероятность перехода может неограниченно возрастать. Тем самым резонансное взаимодействие не может изучаться в рамках рассматриваемого метода последовательных приближений, который требует достаточной малости величины  $\left| a_{nm}^{(1)} \right|^2$ .

Однако этот метод оказывается весьма эффективным, когда вместо одиночного конечного состояния мы имеем "размытый" спектр или систему близко отстоящих уровней. В этом случае следует рассматривать переход не на уровень  $m$ , а в некоторый интервал  $\Delta m$  конечных состояний  $n \rightarrow (m \div m + \Delta m)$ . Применимость метода последовательных приближений обусловлена тем, что требованию малости теперь должна удовлетворять не величина  $\left| a_{nm}^{(1)} \right|^2$ , а интеграл  $\int_{\Delta m} \left| a_{nm}^{(1)} \right|^2 dm$ .

Найдем выражение для вероятности перехода в размытое верхнее состояние. Воспользуемся тем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\alpha, \tau) = \delta(\alpha). \quad (5.2.6)$$

где  $\delta(\alpha)$  – дельта-функция. Подставляя (6) в (3), получаем вероятность перехода в состояние с определенной энергией  $E_m$

$$\tilde{\omega}_{nm}^{(1)} = \frac{\pi}{\hbar^2} \left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|^2 \delta(\alpha) = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|^2 \delta(E_m - E_n - \hbar\omega). \quad (5.2.7)$$

При размытом верхнем состоянии целесообразно ввести функцию плотности конечных состояний  $\varphi(E)$ , обладающую тем свойством, что  $\varphi(E)dE$  будет означать число состояний системы в интервале значений от  $E$  до  $E+dE$ . Вероятность перехода из состояния  $E_m$  в одно из состояний в интервале энергий от  $E_m$  до  $E_m+dE_m$  будет равна

$$d\omega_{nm}^{(1)} = \tilde{\omega}_{nm}^{(1)}\varphi(E_m)dE_m = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|^2 \delta(E_m - E_n - \hbar\omega)\varphi(E_m)dE_m. \quad (5.2.8)$$

Проинтегрировав последнее выражение по  $E_m$ , находим полную вероятность перехода

$$\omega_{nm}^{(1)} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|^2 \varphi(E_n + \hbar\omega). \quad (5.2.9)$$

В случае перехода в размытое состояние функция  $\varphi(E)$  по существу будет описывать форму спектральной линии.

Используя рассуждения, аналогичные вышеприведенным, можно установить, что выражение (9) будет справедливо и для процессов излучения.

### 5.3. Переходы через виртуальные состояния

Весьма часто случается, что матричный элемент  $\left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|$  оператора возмущения оказывается равным нулю, обращается в ноль тем самым и вероятность перехода, рассчитанная в первом порядке теории возмущений. Однако значение вероятности, полученное с использованием следующих приближений, может оказаться отличным от нуля.

Рассмотрим вероятность перехода во втором приближении теории возмущений. Воспользуемся формулой (5.1.5). Присутствующая в ней сумма берется по промежуточным состояниям. Важно отметить, что процесс перехода через промежуточные состояния в теории возмущений не следует рассматривать как реальный процесс. Промежуточные состояния носят виртуальный характер и вводятся, прежде всего, для удобства трактовки получаемых выражений. Следует отметить, что при переходах в виртуальные состояния энергия системы не обязательно должна сохраняться. Мало того, виртуальный уровень может располагаться в области запрещенных значений энергии микросистемы. При этом никакие измерения не позволяют обнаружить систему на том или ином виртуальном уровне.

Сказанное не означает, что переход с уровня  $n$  на уровень  $m$  не может происходить через реальное энергетическое состояние, например, через состояние  $l$ . Однако в этом случае анализ перехода должен свестись к последовательному применению аппарата теории возмущений сначала к переходу  $n \rightarrow l$ , а затем к переходу  $l \rightarrow m$ .

Рассматривая во втором приближении переход  $n \rightarrow m$  через виртуальные состояния, можно с помощью формулы (5.1.5) получить

следующее выражении для вероятности перехода, отнесенной к единице времени:

$$\omega_{nm}^{(2)} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_k \frac{\langle m|\hat{h}|k\rangle \langle k|\hat{h}|n\rangle}{E_n - E_k} \right|^2 \varphi(E_m). \quad (5.3.1)$$

Поскольку все слагаемые, входящие в сумму выражения (1), имеют в знаменателе разность  $E_n - E_k$ , то можно сделать вывод, что определяющий вклад в величину  $\omega_{nm}^{(2)}$  вносят переходы через близлежащие к уровню  $n$  виртуальные уровни. Из сравнения формул (5.2.9) и (1), видна аналогия в их структуре. Исходя из нее, можно при переходе от выражения для  $\omega_{nm}^{(1)}$  к выражению для  $\omega_{nm}^{(2)}$  в (5.2.9) формально заменить матричный элемент  $\langle m|\hat{h}|n\rangle$  на матричный элемент  $\Lambda$ , равный

$$\Lambda_{mn} = \sum_k \frac{\langle m|\hat{h}|k\rangle \langle k|\hat{h}|n\rangle}{E_n - E_k}. \quad (5.3.2)$$