

# 1. Задачи

## 1.1. Лазеры

1. Вывести формулу Шавлова для минимальной ширины линии излучения одночастотного лазера:  $\Delta\nu_{ST} = \frac{h\nu}{2\pi P_0 \tau_c^2}$ ,

где  $h\nu$  – энергия фотона,  $\tau_c$  – время жизни фотонов в резонаторе,  $P_0$  – выходная мощность лазера. Согласно формуле Шавлова-Таунса ширина линии излучения лазера обратно пропорциональна выходной мощности и квадрату времени жизни фотонов в резонаторе. Паразитными потерями пренебречь.

Связь между параметрами:  $P_0 = \bar{N}_{phot} \frac{h\nu}{\tau_c}$ ;  $\Delta\nu_c = \frac{1}{2\pi\tau_c}$ .

2. Вывести формулу Шавлова для лазера с существенными паразитными потерями.

3. Найти минимальную ширину линии (квантовый предел) излучения лазеров со следующими параметрами:

Лазер 1. Ширина линии излучения YAG:Nd лазера с длиной волны 1,06 мкм,  $n = 1,82$ , длина 1 см, прозрачность зеркала 0,5% и мощность излучения 1 мВт.

Лазер 2. Ширина линии излучения полупроводникового лазера с энергией кванта 1,4 эВ,  $n = 3$ , длина 100 мкм, прозрачность зеркала 30% и мощность излучения 1 мВт.

4. Как зависит минимальная ширина линии (квантовый предел) излучения лазеров от длины лазера с малыми паразитными потерями?

5. Оценить минимальную ширину линии излучения полупроводникового лазера.

6. Оценить минимальную ширину линии излучения полупроводникового лазера с внешним резонатором.

7. Объяснить физический смысл нормированных балансных уравнений многомодового (многоканального) лазера.

8. В лазере с вынужденной синхронизацией мод мощность центральной моды с продольным индексом  $q$  равна  $P_0$ , а ширина спектра на уровне половины мощности (HPFM)  $\Delta\omega_{HPFW}$ . Найти мощность моды с индексом  $q+m$ .

9. В лазере с вынужденной синхронизацией мод найти связь между экспоненциальной шириной и шириной по уровню половины мощности.

10. В лазере с вынужденной синхронизацией мод найти связь между длительностью импульса по уровню половинной мощности и шириной по уровню половины мощности.

## 1.2. Светодиоды

1. Вольтамперные характеристики (ВАХ) светодиода часто задают четырьмя точками: прямым напряжением 1 —  $V_{f1}$ , прямым напряжением 2 —  $V_{f2}$ , прямым напряжением 3 —  $V_{f3}$ , и обратным током насыщения  $I_s$ . Они определяются соответственно при рабочем токе (например, 100 мА), небольшом прямом токе (например 10 мкА), очень низком прямом токе (например 1 мкА) и обратном напряжении (например  $-5$  В). Эти критические точки показаны на рисунке. Требуется обосновать выбор критических точек на вольтамперных характеристиках светодиодов (а) и определить, какой из следующих двух InGaN светодиодов обладает лучшими характеристиками (б):

$$V_{f1} = 3,2 \text{ В}, V_{f2} = 2,5 \text{ В}, V_{f3} = 2,3 \text{ В}, I_s = 0,8 \text{ мкА};$$

$$V_{f1} = 3,4 \text{ В}, V_{f2} = 2,0 \text{ В}, V_{f3} = 1,8 \text{ В}, I_s = 0,8 \text{ мкА}.$$

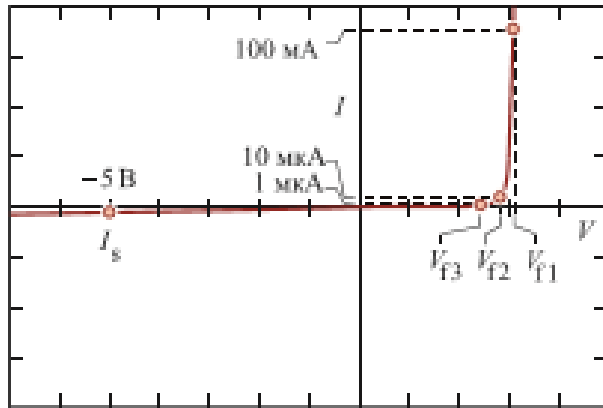


Рисунок. Критические точки ВАХ светодиода: прямое напряжение 1 —  $V_{f1}$  (определяемое при рабочем токе, например, 100 мА), прямое напряжение 2 —  $V_{f2}$  (измеряемое при небольшом прямом токе, например, 10 мкА), прямое напряжением 3 —  $V_{f3}$  (измеряемое при очень низком прямом токе, например, 1 мкА) и обратный ток насыщения  $I_s$  (измеряемый при обратном напряжении, например, -5 В)

2. Найти толщину переходного слоя, в котором следует изменять химический состав полупроводника для формирования градиентного гетероперехода, обладающего минимальным сопротивлением. Считаем, что разрыв зоны проводимости гетероструктуры AlGaAs/GaAs равен  $\Delta E_c = 300$  мэВ, и структура равномерно легирована донорной примесью с концентрацией  $N_D = 5 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$ .

3. Концентрация электронов в активной области структуры GaAs равна  $2 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Требуется определить плотность тока утечки носителей из активной области в слои, обладающие потенциальными барьерами 200 мэВ и 300 мэВ и сравнить полученные значения тока утечки с типичными значениями инжекционного тока светодиодов, лежащими в диапазоне 0,1–10 кА/см<sup>2</sup>. Подвижность электронов считать равной 2000 см<sup>2</sup>/В, а время жизни неосновных носителей 5 нс.

4. Рассчитать уровень тока, при котором произойдет заполнение электронами квантовой ямы в двойной гетероструктуре GaAs с высотой потенциального барьера  $\Delta E_c = 200$  мэВ и толщиной активной области  $W_{DH} = 500$  Å.

5. Определить квантовый выход излучения светодиода с пороговым напряжением, равным  $V_{th} = E_g/e = 2$  В, и дифференциальным сопротивлением  $R_s = 20$  Ом, если при пропускании через него тока  $I = 20$  мА, его оптическая мощность составляет  $P = 4$  мВт при  $\hbar\omega = E_g$ . Предполагается, что  $\eta_{extra} = 50\%$ .

6. Рассчитать критические углы полного внутреннего отражения для светодиодов на основе GaAs, GaN и полимерных светодиодов, определить долю света, способного выйти за пределы их планарных структур. Оценить изменения, которые произойдут при помещении планарного светодиода на основе GaAs в герметичный прозрачный полимерный корпус с показателем преломления 1,5 (отражением света на границе раздела полимер–воздух можно пренебречь). Показатели преломления для GaAs, GaN и полимерных материалов, соответственно, равны 3,4; 2,5 и 1,5.

7. Оценить эффективность связи светодиод – оптическое волокно, т.е. рассчитать долю излучения из активной области планарного светодиода GaAs, попадающую в оптический волоконный световод. Активную область светодиода считать расположенной в непосредственной близости от поверхности точечной излучающей областью. Входная угловая апертура оптического волоконного световода равна  $12^\circ$ , показатель преломления GaAs  $n_s = 3,4$ . Потерями на отражение Френеля на границах раздела полупроводник–воздух и воздух–оптическое волокно можно пренебречь.

8. Определить линейный температурный коэффициент прямого напряжения светодиода GaAs при комнатной температуре. Считается, что при этой температуре  $N_A = N_D = 2 \times 10^{17}$  см<sup>-3</sup>. В расчетах внутренний нагрев светодиода можно не учитывать. Каким будет падение напряжения на светодиоде при увеличении температуры с  $20^\circ\text{C}$  до  $40^\circ\text{C}$ ?

9. Рассчитать критический угол выходного конуса излучения ламбертовского отражателя с коэффициентом отражения, равным 1, встроенного в структуру светодиода на основе GaAs, и среднее

число отражений, которые совершит фотон, прежде чем вылетит за пределы материала с высоким показателем преломления. Показатель преломления GaAs равен 3,5.

10. Рассчитать критический угол выходного конуса излучения ламбертовского отражателя с коэффициентом отражения, равным 1, встроенного в структуру светодиода на основе GaN, и среднее число отражений, которые совершит фотон, прежде чем вылетит за пределы материала с высоким показателем преломления. Показатель преломления GaN равен 2,5.

11. Рассчитать спектральный и интегральный коэффициенты усиления излучения полупроводниковой структуры с резонатором. Считать, что коэффициенты отражения зеркал  $R_1 = 90\%$ ,  $R_2 = 97\%$ , коэффициент усиления пучностей  $\xi = 1,5$ ,  $\tau/\tau_{\text{cav}} \approx 1$ , ширину резонансной кривой  $\Delta\lambda = 6,5$  нм, а теоретическую ширину спектра естественного излучения при температуре 300 К  $\Delta\lambda_n = 30$  нм.

12. Оценить энергию максимума линии излучения светодиода на основе гетероструктуры с квантовой ямой. Ширина квантовой ямы равна  $a$ . Считать, что рекомбинация идет с нижнего локализованного состояния электронов в зоне проводимости на верхнее локализованное состояние дырок в валентной зоне (оба состояния с минимальной энергией, значение которой много меньше глубины квантовой ямы  $U_0$ ). Массы электронов и дырок считать равными, энергия запрещенной зоны в квантовой яме равна  $E_{g2}$ .

### **1.3. Задачи госэкзаменов на кафедре оптики и спектроскопии и физики наносистем для специалистов и магистров**

1. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью  $I_0$  падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Какова интенсивность света  $I$  за экраном в точке, для которой отверстие:

- а) равно первой зоне Френеля; внутренней половине первой зоны;
- б) сделали равным первой зоне Френеля и затем закрыли его половину (по диаметру)?

2. Оценить естественную ширину спектральных линий, расположенных в следующих диапазонах электромагнитного спектра: 10 нм; 500 нм; 10 мкм; 1 см; 100 м.

Значения ширин привести в шкалах круговых частот ( $\Delta\omega = \gamma$ ) и длин волн ( $\Delta\lambda$ ). Как соотносятся между собой значения естественных ширин спектральных линий, расположенных в разных частях электромагнитного спектра, если они выражены в шкале длин волн?

3. Дать сравнительную оценку величин электронной, колебательной и вращательной энергии молекул на примере молекулы водорода ( $H_2$ ).

4. Определить для видимой области спектра радиус когерентности солнечного света на поверхности Земли в зеленой области спектра (диаметр Солнца  $D = 1392000$  км, расстояние от Земли до Солнца  $L = 150$  млн. км).

5. Давление монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 500$  нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, равно 0,15 мкПа. Определите число фотонов, падающих на поверхность площадью 40 см<sup>2</sup> за одну секунду.

6. Нарисовать схему мультиплетного расщепления уровней перехода  $3^2P-3^2D$  атома натрия. Пользуясь правилом сумм интенсивностей, рассчитать относительные интенсивности спектральных компонент.

7. Найти минимальную толщину пленки с показателем преломления 1,33, при которой свет с длиной волны 0,64 мкм испытывает максимальное отражение, а свет с длиной волны 0,40 мкм не отражается совсем. Угол падения света равен 30°.

8. Рассеянный монохроматический свет с  $\lambda = 0,60$  мкм падает на тонкую пленку вещества с показателем преломления  $n = 1,5$ . Определить толщину пленки, если угловое расстояние между соседними максимумами, наблюдаемыми в отраженном свете под углами с нормалью, близкими к  $\alpha = 45^\circ$ , равно  $\Phi = 3,0^\circ$ .

9. Написать обозначения нижних термов в схеме LS-связи для электронных конфигураций атома ртути:  $5d^{10}6s^2$ ,  $5d^{10}6s6p$ ,  $5d^96s^26p$ ,  $5d^96s^27s$ . Уровни каких из этих конфигураций могут взаимно возмущать друг друга?

10. На плоско-выпуклую линзу, лежащую на плоскопараллельной пластинке плоской стороной вверх, нормально падает излучение с длиной волны 532 нм. Найти радиусы 1-го светлого и 1-го темного колец. Радиус кривизны  $R$  поверхности линзы равен 150 см.

11. Плоско-выпуклая линза, положена на плоско-параллельную пластинку плоской стороной вверх, причем вследствие попадания пылинки между линзой и пластинкой есть зазор. На линзу нормально падает излучение с длиной волны 532 нм, и диаметры 4-го и 5-го темных колец Ньютона, наблюдаемых в отраженном свете, равны 0,54 мм и 0,68 мм. Определить радиус кривизны  $R$  поверхности линзы и зазор  $\mu$  между линзой и пластинкой.

12. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на круглое отверстие. На расстоянии  $b = 9$  м от него находится экран, где наблюдают некоторую дифракционную картину. Диаметр отверстия уменьшили в  $N = 3$  раза. Найти новое расстояние  $b'$ , на котором надо поместить экран, чтобы получить на нем дифракционную картину, подобную той, что в предыдущем случае, но уменьшенную в  $N$  раз.

13. При освещении вакуумного фотоэлемента монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda_1 = 0,4$  мкм он заряжается до разности потенциалов  $\varphi_1 = 2$  В. Определите, до какой разности потенциалов зарядится фотоэлемент при освещении его монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda_2 = 0,3$  мкм.

14. Прозрачная дифракционная решетка имеет период  $d = 1,50$  мкм. Найти угловую дисперсию  $D$  (в угл. мин/нм), соответствующую максимуму наибольшего порядка спектральной линии с  $\lambda = 530$  нм, если свет падает на решётку

а) нормально

б) под углом  $\varphi = 45^\circ$  к нормали.

15. При нормальном падении света на дифракционную решетку угол дифракции для линии  $\lambda_i = 0,65$  мкм во втором порядке равен

$\alpha = 45^\circ$ . Найти угол дифракции для линии  $\lambda_3 = 0,5$  мкм в третьем порядке.

16. Найти время затухания излучения  $t_3$  в холодном резонаторе гелий-неонового лазера с параметрами:  $L = 0,3$  м,  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = R = 0,95$ ,  $\gamma_{np} = 0$ . Распределенными потерями пренебречь, показатель преломления среды  $n = 1$ .

17. Свет с длиной волны 535 нм падает нормально на дифракционную решетку. Найти ее период, если одному из фраунгоферовых максимумов соответствует угол дифракции  $35^\circ$  и наибольший порядок спектра равен 5.

18. При нормальном падении света на дифракционную решетку угол дифракции для линии  $\lambda_1 = 0,65$  мкм во втором порядке равен  $\alpha = 45^\circ$ . Найти угол дифракции для линии  $\lambda_3 = 0,5$  мкм в третьем порядке.

19. Свет с  $\lambda = 589$  нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом  $d = 2,5$  мкм, содержащую  $N = 10\ 000$  штрихов. Найти угловую ширину дифракционного максимума второго порядка.

20. На вещество с однородно уширенной спектральной линией воздействует насыщающее монохроматическое излучение, частота которого равна частоте максимума линии. Определить величину интенсивности излучения, воздействие которого приведет к возрастанию ширины линии на 1%. Длина волны излучения равна 0,5 мкм. Ширина ненасыщенной линии 1 см. Время релаксации возбужденного уровня энергии определяется процессом спонтанного испускания излучения и составляет  $10^{-3}$  с. Показатель преломления вещества равен 1,5.

21. Рассчитать дисперсионную длину, если начальная длительность импульса 90 пс, параметр  $\beta_2 = 25$  пс<sup>2</sup>/км.

22. Оценить энергию максимума линии излучения светодиода на основе гетероструктуры с квантовой ямой. Ширина квантовой ямы равна  $a$ . Считать, что рекомбинация идет с нижнего локализованного состояния электронов в зоне проводимости на верхнее



локализованное состояние дырок в валентной зоне (оба состояния с минимальной энергией, значение которой много меньше глубины квантовой ямы  $U_0$ ). Массы электронов и дырок считать равными, энергия запрещенной зоны в квантовой яме равна  $E_{g2}$ .

23. На чистую жидкость с показателем преломления  $n = 1,5$  падает монохроматическое излучение с длиной волны  $\lambda = 532$  нм. Найти сдвиг  $\Omega$  частоты света, рассеянного на упругих волнах, в направлении, составляющем  $90^\circ$  с направлением падающего пучка. Скорость  $v$  упругих волн в веществе составляет  $1,5 \cdot 10^5$  см/сек. Затуханием упругих волн в среде пренебречь.

#### **1.4. Задачи госэкзаменов на кафедре оптики и спектроскопии для бакалавров (2011 – 2015)**

1. Определить доплеровское смещение для спектральной линии атомарного водорода с длиной волны  $\lambda$ , если её наблюдать под прямым углом к пучку атомов водорода с кинетической энергией  $T$ .

2. Найти на сколько компонент расщепится головная линия серии Лаймана атома водорода в «слабом» однородном статическом магнитном поле (эффект Зеемана).

3. Проанализировать картину расщепления спектральных линий атома серии Лаймана водорода в «сильном» однородном статическом магнитном поле (эффект Пашена – Бака).

4. Тонкая собирающая плосковыпуклая линза изготовлена из стекла с абсолютным показателем  $n$  и размещена в вакууме так, что ее плоская поверхность параллельна экрану, находящемуся от нее на расстоянии  $L$ . На сферическую поверхность линзы падает узкий параллельный пучок света, ось симметрии которого совпадает с главной оптической осью линзы. Определите радиус кривизны  $R$  сферической поверхности линзы, если при заполнении пространства между линзой и экраном прозрачным веществом с абсолютным показателем преломления  $n_1$  диаметр светового пятна от прошедшего через линзу света на экране не изменился.

5. Рассчитать дисперсионную длину, если начальная длительность импульса 90 пс, параметр  $\beta_2=25 \text{ пс}^2/\text{км}$ .
6. Определите минимальный импульс, которым должен обладать электрон, чтобы эффект Вавилова – Черенкова наблюдался в среде с показателем преломления  $n$ .
7. На дифракционную решётку нормально к её поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda=0,5\text{мкм}$ . Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на  $L=1 \text{ м}$ . Расстояние  $l$  между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно 20,2 см. Определить постоянную  $d$  дифракционной решетки.
8. Два николя  $N_1$  и  $N_2$  расположены так, что угол  $\alpha$  между их плоскостями пропускания равен  $60^\circ$ . Определить во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через один николь ( $N_1$ ). При прохождении каждого из николей потери на отражение и поглощение света составляют 5 %.
9. На дифракционную решётку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda=0,5\text{мкм}$ . Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на  $L=1 \text{ м}$ . Расстояние  $l$  между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно 20,2 см. Определить число максимумов, которое при этом дает дифракционная решетка.
10. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$ . Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на  $L = 1 \text{ м}$ . Расстояние  $l$  между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно 20,2 см. Определить максимальный угол  $\varphi_{\text{max}}$  отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.
11. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света составляет угол  $\varphi=97^\circ$  с падаю-

щим пучком. Определить показатель преломления  $n$  жидкости, если отраженный свет полностью поляризован.

12. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda = 0,5$  мкм. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на  $L = 1$  м. Расстояние  $l$  между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно 20,2 см. Определить число  $n$  штрихов на 1 см.

13. Пучок частично-поляризованного света рассматривается через николю. Первоначально николю установлен так, что его плоскость пропускания параллельна плоскости колебаний линейно-поляризованного света. При повороте николя на угол  $\varphi = 60^\circ$  интенсивность пропускаемого им света уменьшилась в  $k = 2$  раза. Определить отношение  $I_e/I_n$  интенсивностей естественного и линейно-поляризованного света, составляющих данный частично-поляризованный свет, а также степень поляризации  $P$  пучка света.

14. Пластинка кварца толщиной  $d_1 = 1$  мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол  $\varphi_1 = 20^\circ$ . Определить какова должна быть толщина  $d_2$  кварцевой пластинки, помещенной между двумя «параллельными» николями, чтобы свет был полностью погашен? Удельное вращение  $[\alpha]$  раствора сахара равно  $0,665$  град/(м $\times$ кг $\times$ м $^{-3}$ ).

15. Пластинка кварца толщиной  $d_1 = 1$  мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол  $\varphi_1 = 20^\circ$ . Определить какой длины  $l$  трубку с раствором сахара массовой концентрацией  $C = 0,4$  кг/л надо поместить между николями для получения того же эффекта? Удельное вращение  $[\alpha]$  раствора сахара равно  $0,665$  град/(м $\times$ кг $\times$ м $^{-3}$ ).

16. Определить полное количество мод  $M$ , которые могут распространяться в оптоволокне с параметрами:  $\lambda = 0,95$  мкм и  $1,55$  мкм, показатель преломления сердцевины и оболочки равны, соответственно,  $n_c = 1,47$  и  $n_o = 1,46$ , диаметр сердцевины  $a = 0,8$  мкм.

17. Определить напряжение  $U$ , под которым работает рентгеновская трубка, если коротковолновая граница  $\lambda_{\min}$  в спектре тормозного рентгеновского излучения равна 15,5 пм.

18. Параллельный пучок света длиной волны  $\lambda = 500$  нм падает нормально на зачерненную поверхность, производя давление  $p = 10$  мкПа. Определить концентрацию  $n$  фотонов в пучке.

19. Параллельный пучок света длиной волны  $\lambda = 500$  нм падает нормально на зачерненную поверхность, производя давление  $p = 10$  мкПа. Определить число  $n_1$  фотонов, падающих на поверхность площадью  $1 \text{ м}^2$  за время 1 с.

## 2. Ответы и решения

### 2.1. Лазеры

1. Покажем, что  $\Delta \nu_{ST} = \frac{\Delta \nu_c}{\bar{N}_{Phot}}$ , где  $\Delta \nu_c$  – ширина полосы резонатора,  $\bar{N}_{Phot}$  – среднее число фотонов в резонаторе. Будем считать, все фотоны строго синфазны (показаны на рис.1 суммой векторов черного цвета). В течение времени  $\tau_{FOT}$  жизни фотона в резонаторе к этому ансамблю синфазных фотонов добавляется один спонтанно испущенный фотон, имеющий произвольную фазу. Средний фазовый сдвиг  $\delta \varphi_{SP}$  из-за появления этого фотона примерно равен  $1/(\bar{N}_{Phot})$ , а изменение частоты  $\delta \omega_{SP} = 1/(\tau_{FOT} \bar{N}_{Phot}) = \Delta \omega_R / \bar{N}_{Phot}$  т.к.  $(1/(\tau_{FOT}) = \Delta \omega_R)$ . Это изменение частоты и есть квантовый предел ширины линии  $\delta \omega_{SP} \equiv \Delta \omega_Q$ .

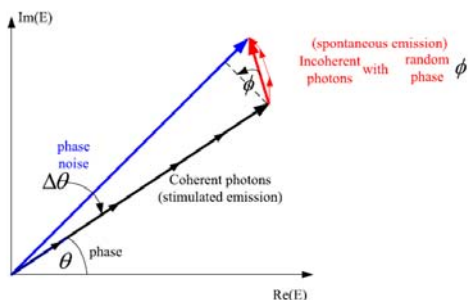


Рис.1. Модель фазора для расчета шумов лазера

Таким образом, минимальная ширина, или квантовый предел ширины  $\Delta \nu_Q$  спектрального распределения одномодового лазера определяется следующим выражением:

$$\Delta \nu_Q = \frac{\Delta \nu_R}{\bar{M}_{FOT}},$$

где  $\Delta \nu_R$  – ширина полосы резонатора,  $\bar{M}_{FOT}$  – среднее число фотонов в резонаторе.

Связь числа  $\bar{M}_{FOT}$  фотонов в резонаторе с выходной мощностью  $P_{OUT} \approx \bar{M}_{FOT} h\nu / \tau_{FOT}$  или  $\bar{M}_{FOT} \approx P_{OUT} \tau_{FOT} / h\nu$ .

В результате получаем:

$$\Delta\nu_{ST} = \Delta\nu_Q = \Delta\nu_R h\nu / (P_{OUT} \tau_{FOT}) = 2\pi h\nu (\Delta\nu_R)^2 / P_{OUT} \quad \text{или}$$

$$\Delta\nu_{ST} = \frac{h\nu}{2\pi P_0 \tau_c^2}$$

2. В формулу  $\Delta\nu_Q = \frac{\Delta\nu_R}{\bar{M}_{FOT}} = \frac{1}{2\pi\tau_{FOT}\bar{M}_{FOT}}$  необходимо подставить

выражение для связи  $\bar{M}_{FOT}$  с выходной мощностью лазера с паразитными потерями:

$$\bar{M}_{FOT} \approx [P_{OUT} \tau_{FOT} / h\nu] \cdot [(Z_{OUT} + Z_Z) / Z_{OUT}].$$

$$\Delta\nu_{ST} = \Delta\nu_Q = \frac{h\nu}{2\pi\tau_{FOT}^2 P_{OUT} (Z_{OUT} + Z_Z) / Z_{OUT}}$$

3.

Лазер 1.  $\Delta\nu_{ST} = \frac{h\nu}{2\pi P_0 \tau_c^2}$ ,  $\frac{h\nu}{2\pi P_0} \approx \tau_{FOT} = 24 \text{ нс}$ ;  $\Delta\nu_Q = 5 \cdot 10^{-2} \text{ Гц}$ .

$$\tau_{FOT} = \frac{1}{\left( \alpha - \frac{1}{2L} \ln R_{OUT} R_Z \right) c'}$$

$$\tau_c \approx 1 / [(1 - R_{OUT}) \Delta\nu_M] \approx 100 / [1,5 \cdot 15 \text{ ГГц}] = 5 \cdot 10^{-9} = 5 \text{ нс}$$

Оценка ширины линии излучения YAG:Nd лазера с длиной волны 1,06 мкм,  $n = 1,82$ , длина 0,5 см, прозрачность зеркала 1,5% и мощность излучения 0,1 мВт.  $\tau_{FOT} = 10 \text{ нс}$ ;  $\Delta\nu_Q \approx 1 \text{ Гц}$ .

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}; \quad h\nu = 300 \text{ ТГц} \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$$

$$\sim 20 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$$

$$h\nu / (2\pi P_0) \approx 20 / (6,28 \cdot 0,1) \cdot 10^{-20} \cdot 10^3 \approx 30 \cdot 10^{-17} = 300 \cdot 10^{-18} \text{ пс}$$

$$\Delta \nu_Q \approx \frac{300 \cdot 10^{-18}}{10^2 \cdot 10^{-18}} \approx 3 \text{ Гц}$$

Лазер 2. Ширина линии излучения полупроводникового лазера с энергией кванта 1,4 эВ,  $n = 3$ , длина 100 мкм, прозрачность зеркала 30% и мощность излучения 1 мВт.

$$\tau_{FOT} = 6 \text{ пс}; \Delta \nu_Q \approx 10 \text{ МГц.}$$

4.

$$\Delta \nu_{ST} = \frac{h\nu}{2\pi P_0 \tau_c^2},$$

мощность от длины резонатора не зависит, время жизни фотона пропорционально длине резонатора лазера:

$$\tau_{FOT} = \frac{2L_{OPT}}{(-\ln R_{OUT})c}$$

После подстановки:

$$\Delta \nu_Q = \frac{h\nu}{8\pi P_{OUT}} \left( \frac{c}{L_{OPT}} \right)^2 [\ln R_{OUT}]^2$$

В коротких резонаторах с малыми паразитными потерями ( $\alpha L \ll \ln R_{OUT} R_Z$ ) ширина линии излучения обратно пропорциональна квадрату длины резонатора.

5.

Ширина  $\Delta \nu$  спектра одномодового лазера с трехуровневой схемой (или с любой другой, в которой пренебречь населенностью нижнего уровня нельзя) больше приведенного выше выражения на величину фактора спонтанного излучения.

$$\Delta \nu_Q = \frac{h\nu}{2\pi \tau_{FOT}^2 P_{OUT} (Z_{OUT} + Z_Z) / Z_{OUT}} \frac{\sigma_2 N_2}{\sigma_2 N_2 - \sigma_1 N_1}.$$

6.

Ширина  $\Delta \nu$  спектра одномодового полупроводникового лазера больше, чем ширина твердотельных или газовых лазеров, в  $(1 + \alpha_M)$  раз:

$$\Delta\nu_Q = \frac{h\nu}{2\pi\tau_{\text{FOТ}}^2 P_{\text{OUT}}(Z_{\text{OUT}} + Z_Z) / Z_{\text{OUT}}} (1 + \alpha_M), \text{ или}$$

$$\Delta\nu_Q = \frac{h\nu}{8\pi P_{\text{OUT}}} \left(\frac{c}{nL}\right)^2 (\alpha L - \ln R_{\text{OUT}} R_Z) \ln R_{\text{OUT}} (1 + \alpha_M)$$

где  $\alpha_M$  – отношение вещественной  $\Delta n \text{Re}$  и мнимой  $\Delta n \text{Im}$  частей показателя преломления активной среды (типичное значение  $\alpha_M$  в пределах 5 – 7). Длина волны 1,5 мкм, длина 100 мкм, 1 Мвт.

7.

Ширина  $\Delta\nu$  спектра одномодового полупроводникового лазера больше, чем ширина твердотельных или газовых лазеров, в  $(1 + \alpha_M)$  раз

$$\Delta\nu_Q = \frac{h\nu}{2\pi\tau_{\text{FOТ}}^2 P_{\text{OUT}}(Z_{\text{OUT}} + Z_Z) / Z_{\text{OUT}}} (1 + \alpha_M), \text{ или}$$

$$\Delta\nu_Q = \frac{h\nu}{8\pi P_{\text{OUT}}} \left(\frac{c}{nL}\right)^2 (\alpha L - \ln R_{\text{OUT}} R_Z) \ln R_{\text{OUT}} (1 + \alpha_M)$$

где  $\alpha_M$  – отношение вещественной  $\Delta n \text{Re}$  и мнимой  $\Delta n \text{Im}$  частей показателя преломления активной среды (типичное значение  $\alpha_M$  в пределах 5 – 7). Длина волны 1,5 мкм, длина 100 мкм, 1 Мвт.

8.

Ширина  $\Delta\nu$  спектра одномодового полупроводникового лазера больше, чем ширина твердотельных или газовых лазеров, в  $(1 + \alpha_M)$  раз

При наличии обратной связи ширина линии:

$$\Delta f \cong \frac{(1 + \alpha^2) \Delta f_0}{[1 + X \cos(\phi_0 + \phi_R)]^2}$$

где  $(1 + \alpha^2) \Delta f_0$  – ширина линии без обратной связи,  $X = k\tau(1 + \alpha^2)^{1/2}$ ,  $\phi_R = \tan^{-1} \alpha$ ,  $\tau$  – время обхода внешнего резонатора,  $k = \frac{(1 - r_c^2)r_m}{r_c \tau_c}$ ,  $r_c$  – коэффициент отражения от внутреннего зеркала резонатора,  $\tau_c$  – время обхода резонатора лазера,  $\tau_c = 2d/c$ .



$$k = \frac{(1-r_c^2)r_m}{r_c\tau_c}$$

$$\phi_0 = \omega_0\tau + \phi_m$$

8.

Для многомодовой генерации можно получить систему уравнений вида:

$$\frac{dm_i}{d\tau} = Gm_i(n_i - 1 - \varepsilon_i) \quad (1)$$

$$\frac{dn_i}{d\tau} = \eta_i - n_i - n_i m_i - \sum_{i \neq j} \zeta_{ij} m_j \quad (2)$$

где  $m_i, \eta_i, n_i$  - соответственно безразмерные плотности фотонов, скорости накачки и коэффициенты усиления, пропорциональные инверсным населенностям,  $G = T_1 / \tau_{phot}$  - отношение времени релаксации инверсной населенности к времени жизни фотонов, в твердотельных лазерах это большой численный коэффициент, - нормированные коэффициенты кросс-насыщения,  $\tau = t / T_1$  - нормированное время. Анализ системы (1-2) показывает, что стационарное решение устойчиво при условии, что  $\zeta_{ij} < 1$ .

10.

Считаем, что спектр одиночного импульса имеет форму гауссовой кривой:

$$\rho_\omega(\omega) = \rho_{0,\omega} \exp[-(\Delta\omega / \Delta\omega_0)^2]$$

Спектр периодической последовательности импульсов представляет собой совокупность узких спектральных пиков на частотах продольных мод  $\omega_{q+m} = \omega_q + m\Delta\omega_L$ . Мощность моды с индексом  $q + m$  описывается выражением:

$$P_{q+m}(\omega_{q+m}) = P_0 \exp[-((\omega_{q+m} - \omega_q) / \Delta\omega_0)^2] = P_0 \exp[-(m \cdot \Delta\omega_L / \Delta\omega_0)^2]$$

С учетом связи между  $\Delta\omega_0$  и  $\Delta\omega_{HPFW}$  ( $\Delta\omega_0 = \Delta\omega_{HPFW} / 2(\ln 2)^{1/2}$ ) окончательно получим:

$$P_{q+m} = P_0 \exp \left[ - \left( \frac{2m\Delta\omega_L}{\Delta\omega_{HPFW}} \right)^2 \ln 2 \right]$$

11.

Спектр излучения лазера с вынужденной синхронизацией мод можно аппроксимировать гауссовой кривой.

$$\rho_\omega(\omega) = \rho_{0,\omega} \exp[-(\Delta\omega / \Delta\omega_0)^2]$$

При  $\Delta\omega = \Delta\omega_{HPFW} / 2$  плотность мощности равна (по определению) половине максимальной плотности мощности:

$$\rho_\omega(\Delta\omega_{HPFW}) = \rho_{0,\omega} \exp[-(\Delta\omega_{HPFW} / \Delta\omega_0)^2] = 0,5\rho_{0,\omega}$$

Следовательно  $\exp[-(\Delta\omega_{HPFW} / \Delta\omega_0)^2] = 0,5$

Прологарифмировав обе части равенства получим:

$$\begin{aligned} (\Delta\omega_{HPFW} / \Delta\omega_0)^2 &= -\ln 0,5 = \ln 2 \\ \Delta\omega_0 &= \Delta\omega_{HPFW} / 2(\ln 2)^{1/2} \end{aligned}$$

12.

Длительность импульса по половине мощности  $\Delta\tau_{HPFW}$  определяется выражением:

$$\Delta\tau_{HPFW} = 2 \ln 2 / \pi \Delta\nu_{HPFW} = 0,441 / \Delta\nu_{HPFW}$$

Введем  $\Delta\tau_0$  и  $\Delta\nu_0$  как величины, стоящие в экспонентах соответствующих гауссовых функций для мощности и спектра мощности  $P(t) = P_0 \exp[-(t / \Delta\tau_0)^2]$  и  $\rho(\nu) = \rho_0 \exp[-(\Delta\nu / \Delta\nu_0)^2]$ , тогда  $\Delta\tau_{HPFW} = 2(\ln 2)^{1/2} \Delta\tau_0$  и  $\Delta\nu_{HPFW} = 2(\ln 2)^{1/2} \Delta\nu_0$ , получим:

$$\Delta\tau_{HPFW} \cdot \Delta\nu_{HPFW} = 2 \ln 2 / \pi = 2(\ln 2)^{1/2} \Delta\tau_0 \cdot 2(\ln 2)^{1/2} \Delta\nu_0$$

## 2.2. Светодиоды

1. а) Для светодиодов, излучающих на одной и той же пиковой длине волны,  $V_{f1}$  должно быть как можно меньше, поскольку его высокие значения указывают на большое последовательное сопротивление. Напряжение  $V_{f2}$  должно быть как можно больше и как можно ближе  $V_{f1}$ , поскольку низкая величина  $V_{f2}$  свидетельствует о чрезмерных утечках, приводящих к преждевременному

включению светодиода. Такие же рассуждения справедливы и для  $V_{f3}$ . Обратный ток насыщения должен быть как можно меньше, поскольку его высокие значения указывает на наличие механизмов утечки тока (например, утечки по поверхности или по объему, связанные с поверхностными состояниями, точечными дефектами и дислокациями в объеме полупроводника). Низкие значения  $V_{f1}$  и  $I_s$ , совместно с высокими значениями  $V_{f2}$  и  $V_{f3}$ , как правило, соответствуют светодиодам, обладающими высокой надежностью.

(б) Первый диод обладает лучшими характеристиками, чем второй, благодаря более низкому последовательному сопротивлению и небольшим утечкам, приводящим к преждевременному включению диода.

2. Из уравнения  $W_D = \sqrt{\frac{2s \cdot \Delta E_c}{e^2 \cdot N_D}}$  найдем толщину обедненного слоя  $W_D = 30$  нм. Следовательно, для снижения переходного сопротивления необходимо формировать плавный гетеропереход на протяжении 30 нм. Область плавного гетероперехода должна состоять из двух параболических областей.

3. Уровень Ферми в GaAs при плотности носителей  $2 \times 10^{18} \text{ см}^{-3}$  лежит на расстоянии 77 мэВ от края зоны проводимости. Считая, что эффективные плотности состояний в барьерных слоях и активной области равны, находим концентрации носителей на краях барьерных слоев с потенциальными барьерами 200 мэВ и 300 мэВ:  $3,9 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$  и  $8,3 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ . Коэффициент диффузии по соотношению Эйнштейна равен  $D_n = 51,7 \text{ см}^2/\text{с}$ . Диффузионная длина определяется как  $L_n = (D_n \times \tau_n)^{1/2} = 5,1 \text{ мкм}$ . Токи утечки, вычисленные по выражению

$$I_n |_{x=0} = -eD_n \cdot \left. \frac{dn_B(x)}{dx} \right|_{x=0} = -eD_n \cdot \frac{n_B(0)}{L_n},$$

равны  $63 \text{ кА/см}^2$  для барьера в 200 мэВ и  $1,3 \text{ кА/см}^2$  для 300 мэВ. Из сравнения полученных данных с типичными значениями плотностей токов диода следует, что токи утечки могут приводить к большим потерям в системах с малой высотой барьерных слоев.

4. Рассмотрим светодиод на основе двойной гетероструктуры с толщиной активной области  $W_{DH}$ . Уравнение скоростей поступления носителей в активную область (за счет инжекции) и их удаления из этой области (за счет рекомбинации) определяется выражением  $\frac{dn}{dt} = \frac{J}{e \cdot W_{DH}} - B \cdot n \cdot p$ , где  $B$  – коэффициент бимолекулярной рекомбинации. При высоких плотностях тока инжекции  $n = p$ . Решая указанное выше уравнение относительно  $n$  для стационарных условий ( $dn/dt = 0$ ), получаем выражение  $n = \sqrt{\frac{J}{e \cdot B \cdot W_{DH}}}$ .

С ростом тока инжекции плотность носителей увеличивается. В результате этого растет энергия Ферми. В условиях высоких плотностей носителей для уровня Ферми можно записать следующее

$$\text{приближенное выражение } \frac{E_F - E_C}{kT} = \left( \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{n}{N_c} \right)^{2/3}.$$

При высоких уровнях инжекции положение уровня Ферми может достичь величины потенциального барьера, в этой точке  $E_F - E_C = \Delta E_C$ . Используя это значение, из уравнений выше можно найти плотность тока, при которой происходит заполнение активной области носителями зарядов:

$$J = \left( \frac{4N_c}{3\sqrt{\pi}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\Delta E_C}{kT} \right)^3 \cdot e \cdot B \cdot W_{DH}.$$

При  $N_c = 4,4 \times 10^{17} \text{ см}^{-3}$  и  $B = 10^{-10} \text{ см}^3/\text{с}$ , из данного уравнения находим искомую плотность тока:  $I_{max} = 3990 \text{ А/см}^2$ .

5. Вольт-амперная характеристика рассматриваемого светодиода при прямом смещении имеет вид  $V = V_{th} + IR_s$ . Требуется определить внутренний и внешний квантовый выход излучения светодиода, а также его КПД.

Активная область идеального светодиода испускает один фотон на каждый инжектированный в нее электрон, т. е. каждый электрон генерирует один световой квант (фотон). Поэтому квантовый выход излучения активной области идеального светодиода равен единице. Внутренний квантовый выход излучения светодиода (или его внутренняя эффективность), определяется отношением числа

рожденных в его активной области фотонов к числу инжектированных в нее электронов в единицу времени, т.е. в секунду):

$$\eta_{int} = \frac{P_{int}/(\hbar\omega)}{I/e}, \text{ где } P_{int} - \text{ мощность оптического излучения из активной области светодиода, } I - \text{ ток инжекции.}$$

### 2.3. Задачи госэкзаменов на кафедре оптики и спектроскопии для специалистов и магистров

1.

а) При всех открытых зонах Френеля амплитуда равна

$$A_{\infty} \cdot I \sim A^2 \Rightarrow I_0 \sim A_{\infty}$$

При первой открытой зоне Френеля.

$$A = A_1 = 2 A_{\infty} \Rightarrow I \sim 4 A_{\infty}^2 = 4 I_0$$

При половине внутренней первой зоны амплитуда составляет:

$$A = A_{1/2} = \sqrt{A_{\infty}^2 + A_{\infty}^2} = A_{\infty} \sqrt{2} \Rightarrow I \sim A^2 = 2 A_{\infty}^2 = 2 I_0$$

б) При закрытой половине первой зоны амплитуда будет равна

$$A = 1/2 A_1 = A_{\infty} \Rightarrow I \sim A^2 = A_{\infty}^2 = I_0$$

2.

В предположении малости затухания выражение для естественной ширины линии в классическом приближении имеет вид:

$$\gamma = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \omega_0^2}{m_e c^3} \quad (1)$$

Если выразить через длину волны, то формула (1) принимает следующий вид:

$$\gamma = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 (2\pi/\lambda)^2}{m_e c^3} = \frac{2\pi}{3\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c \lambda^2} \quad (2)$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м; } e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл; } m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$\text{Для } 10 \text{ нм: } \gamma = 22 \times 10^{10}$$

Для 500 нм:  $\gamma = 0,88 \times 10^8$

Для 10 мкм:  $\gamma = 22 \times 10^4$

Для 1 см:  $\gamma = 22 \times 10^{-2}$

Для 100 м:  $\gamma = 22 \times 10^{-10}$

3.

$$\frac{E_{\text{кол}}}{E_{\text{эл}}} \sim \frac{\omega_{\text{кол}}}{\omega_{\text{эл}}} \sim \frac{\sqrt{K_{\text{кол}}}}{\sqrt{K_{\text{эл}}}} \sim \sqrt{\frac{m}{M}} \sim 10^{-3};$$

$$\frac{E_{\text{вр}}}{E_{\text{эл}}} \sim \frac{\frac{\hbar}{2M\omega} J(J+1)}{\frac{\hbar}{2m\omega} l(l+1)} \sim 10^{-3}$$

$K_{\text{кол}} \sim K_{\text{эл}}$ ,  $\bar{M}$  – масса ядер;

$E_{\text{эл}}$  – кинетические энергии вращения электрона

$$\bar{M} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \sim \frac{M}{2}$$

4.

$r_k = \frac{0,32 \lambda_0}{2\alpha}$ , где  $\lambda_0$  – средняя длина волны видимого излучения,  $\alpha$  – угловой размер солнца.

$$r_k \approx 0,01 \text{ мм}$$

5.

$$P = \frac{E}{t} \Rightarrow E = pt$$

$$N = \frac{\Delta W}{E} = \frac{\Phi \Delta t}{E} = \frac{E S \Delta t}{E}$$

$$E = hv = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\Rightarrow N = \frac{E S \Delta t}{hc} = \frac{p S \lambda \Delta t}{h} = \frac{0,15 \cdot 5 \cdot 40 \cdot 10^{-17}}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 4,5 \cdot 10^{17}$$

6.

$3^2D$			5/2	6
			3/2	4
	a	b	c	
$3^2P$			3/2	4
			J=1/2	2

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_a + I_c}{I_b} &= \frac{4}{6} \\ \frac{I_a + I_b}{I_c} &= \frac{4}{2} \end{aligned} \right\} I_a : I_b : I_c = 1 : 9 : 5$$

Правило отбора  $\Delta J=0, \pm 1$

7.

Условия максимума:  $2h\sqrt{n^2 + \sin^2 \alpha} = (m_1 + \frac{1}{2})\lambda_1$

Условия минимума:  $2h\sqrt{n^2 + \sin^2 \alpha} = (m_2 + 1)\lambda_2$

$(m_1 + \frac{1}{2})\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (m_2 + 1)$

$1,6m_1 = m_2 + 0,2$  (1)

Из условий максимума и минимума видно, что наименьшее значение  $h_{\min}$  соответствует наименьшим  $m_1$  и  $m_2$ , удовлетворяющим уравнению (1)

Подбирая  $m_1$  и  $m_2$ , получаем, что  $m_1 = 2, m_2 = 3$

$h_{\min} = \frac{(m_1 + \frac{1}{2})\lambda_1}{2\sqrt{n^2 + \sin^2 \alpha}} = 0,65 \text{ мкм}$

8.

$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (k - \frac{1}{2})\lambda$

$2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha + \Phi)} = (k + \frac{1}{2})\lambda$

$\lambda = 2d(\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha + \Phi)} - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha})$

$d = \frac{\lambda\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\sin 2\alpha \times \Phi}$

9.

$5d^{10}6s^2$  – две заполненные оболочки с нулевыми моментами  $L=0, S=0$  терм  $^1S_0$

$5d^{10}6s6p$   $l_1=0$   $s_1=\frac{1}{2}$   $^1P, ^3P$

$l_2=1$   $s_2=\frac{1}{2}$

$L=1$   $S=0,1$

$5d^96s^26p \sim dp$

$l_1=2$   $S=0,1$

$l_2=1$

$L=1(P), 2(D), 3(F)$

$\left\{ \begin{array}{l} ^1P \ ^1D \ ^1F \\ ^3P \ ^3D \ ^3F \end{array} \right.$

$5d^96s^27s \sim ds$

$L=2, S=0,1$

$^1D, ^3D$

Взаимно возмущаться могут только конфигурации одинаковой четности, определяемой  $P = \sum_i l_i$  как  $(-1)^P$

Таким образом могут возмущаться первая и последняя (четные) и 2-я и 3-я (нечетные)

10.

1) Толщина воздушного промежутка  $\delta$  между пластинкой и линзой на расстоянии  $r$  от точки соприкосновения линзы и пластинки определяется из соотношения для катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника ABC:  $(R - \delta)^2 + r^2 = R^2$ . Из него следует, что  $r^2 = 2R\delta + \delta^2 \approx 2R\delta$ , поскольку  $\delta \ll R$ .

2) Разность хода  $\Delta$  интерферирующих лучей равна:  $\Delta = 2\delta + \lambda/2$ .

3) В темных кольцах разность хода  $\Delta = (2m + 1)\lambda/2$ , в светлых –  $\Delta = m\lambda$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$

4) 1-му светлomu кольцу ( $m = 1$ ) соответствует разность хода  $\Delta = \lambda$ , откуда  $2\delta_1 + \lambda/2 = \lambda$ ,  $\delta_1 = \lambda/4$ , тогда искомый радиус  $r_1 = \sqrt{2R\delta_1} = \sqrt{2R \cdot \lambda/4} = \sqrt{R \cdot \lambda/2} = \sqrt{150 \text{ см} \cdot 0.532 \cdot 10^{-4} \text{ см}/2} = 0.063 \text{ см} = 0.63 \text{ мм}$ .

5) 1-му темному кольцу ( $m = 1$ ) соответствует разность хода  $\Delta = 3\lambda/2$ , откуда  $2\delta_1 + \lambda/2 = 3\lambda/2$ ,  $\delta_1 = \lambda/2$ , тогда искомый радиус  $r_1 = \sqrt{2R\delta_1} = \sqrt{2R \cdot \lambda/2} = \sqrt{R \cdot \lambda} = \sqrt{150 \text{ см} \cdot 0.532 \cdot 10^{-4} \text{ см}} = 0.089 \text{ см} = 0.89 \text{ мм}$ .

11.

1) В отсутствие зазора толщина воздушного промежутка  $\delta$  между пластинкой и линзой на расстоянии  $r$  от точки соприкосновения линзы и пластинки определяется из соотношения для катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника ABC:  $(R - \delta)^2 + r^2 = R^2$ . Из него следует, что  $r^2 = 2R\delta - \delta^2 \approx 2R\delta$ , поскольку  $\delta \ll R$ .

2) С учетом зазора разность хода  $\Delta$  интерферирующих лучей равна:  $\Delta = 2\delta + \lambda/2 + 2\mu$ , где  $\mu$  – величина зазора.

3) В темных кольцах разность хода  $\Delta = (2m + 1)\lambda/2$ , где  $m$  – номер кольца, и, соответственно – для 4-го кольца:  $2\delta_4 + \lambda/2 + 2\mu = (2 \cdot 4 + 1)\lambda/2 = 9\lambda/2$ , откуда  $\delta_4 = 4\lambda\mu$ , – для 5-го кольца:  $2\delta_5 + \lambda/2 + 2\mu = (2 \cdot 5 + 1)\lambda/2 = 11\lambda/2$ , откуда  $\delta_5 = 2,5\lambda - 2\mu$ .

4) Радиус четвертого темного кольца:  $(r_4)^2 = 2R\delta_4 = R \cdot (4\lambda - 2\mu)$ ,  
радиус пятого темного кольца:  $(r_5)^2 = 2R\delta_5 = R \cdot (5\lambda - 2\mu)$ .

5) Вычитая из нижнего уравнения верхнее, можно получить:  $R \cdot \lambda = (r_5)^2 - (r_4)^2$ , откуда  $R = [(r_5)^2 - (r_4)^2] / \lambda = [(0,68 \text{ мм})^2 - (0,54 \text{ мм})^2] / 4 \cdot 0,532 \cdot 10^{-3} \text{ мм} = 8,03 \text{ см}$ .



6) Для зазора  $\mu$ :  $\mu = [5\lambda - (r_5)^2/R] / 2 = [5 \cdot 0,532 \cdot 10^{-3} \text{ мм} - (0,68 \text{ мм})^2/4 \cdot 80,3 \text{ мм}] / 2 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$

или  $\mu = [4\lambda - (r_4)^2/R] / 2 = [4 \cdot 0,532 \cdot 10^{-3} \text{ мм} - (0,54 \text{ мм})^2/4 \cdot 80,3 \text{ мм}] / 2 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$

Ответ:  $R = 8,03 \text{ см}$ ,  $\mu = 6 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ .

12.

$$r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b} k\lambda} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} k\lambda}$$

Так как  $a \rightarrow \infty$ ,  $r_k = \sqrt{bk\lambda}$

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sqrt{bk\lambda}}{\sqrt{hvk\lambda}} = N$$

$$N^2 = \frac{b}{b'}; b' = \frac{b}{N^2} = 1 \text{ м}$$

13.

$$h \frac{c}{\lambda_1} = A_{\text{ЭВЭК}} + eU_1$$

$$h \frac{c}{\lambda_2} = A_{\text{ЭВЭК}} + eU_2$$

$$hc \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = e(U_2 - U_1)$$

$$U_2 = U_1 + \frac{hc}{e} \left( \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right)$$

$$U_2 = 3,03 \text{ В}$$

14.

Разность хода интерферирующих лучей:

$$\Delta = d(\sin \alpha - \sin \varphi)$$

Условие получения максимума:

$$\Delta = (2n) \frac{\lambda}{2} = n\lambda$$

$$d(\sin \alpha - \sin \varphi) = n\lambda$$

$$\sin \alpha = \sin \varphi + \frac{n\lambda}{d}$$

Перебирая значения целого числа  $n$ , пока  $\sin \alpha$  не превосходит единицу, получим:

$$\sin \varphi - \frac{5\lambda}{d} = -0.9$$

Максимальный угол:

$$\alpha_m = \arcsin\left(\sin \varphi - \frac{5\lambda}{d}\right)$$

$$\alpha_m = -64.1581$$

Дисперсия составит:

$$D = \frac{\alpha_m}{\lambda} = 121 \times 10^6$$

15.

Положение главных максимумов для волны для первой спектральной линии света:

$$Z \sin \theta = 2\lambda \quad m = 0, 1, 2, 3$$

Максимуму второго порядка соответствует  $m = 2$ , выражение для длины волны  $\lambda_i$  примет вид:

$$Z \sin \theta_i = 2\lambda_i.$$

Максимуму третьего порядка соответствует  $m = 3$ , выражение для длины волны  $\lambda_s$  примет вид:

$$Z \sin \theta_s = 3\lambda_s.$$

Из первого выражения, учитывая, что по условию  $\theta_i = \alpha$ , получаем:

$$Z = \frac{2\lambda_i}{\sin \alpha}.$$

Подставили данное выражение во второе, получим:

$$\frac{2\lambda_i}{\sin \alpha} \sin \theta_s = 3\lambda_s. \text{ Отсюда получаем, что } \sin \theta_s = \frac{3\lambda_s \sin \alpha}{2\lambda_i} \approx 0,82,$$

значит  $\theta_s \approx 55^\circ$ .

16.

$$t_F = \frac{n}{c} \frac{1}{\gamma_{np} - (1/2L)\ln R} \approx \frac{n}{c} \frac{2L}{1-R}$$

Ответ:

$$t_F \approx \frac{n}{c} \frac{2L}{1-R} = \frac{2 \cdot 0,3}{3 \cdot 10^8 \cdot 0,05} = \frac{0,6}{10^8 \cdot 0,15} = 4 \cdot 10^{-8} = 40 \cdot 10^{-9} = 40 \text{ нс}$$

17.

Запишем условия главных максимумов:

$$d \sin \alpha = m\lambda$$

$$d \sin \alpha_{\max} = 5\lambda$$

Получим:

$$m = 5 \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_{\max}}$$

$\sin \alpha_{\max}$  наиболее близко к единице при целом  $m$  в том случае когда  $\sin \alpha_{\max} = 0.955$ . Тогда  $m = 3$

Учитывая это, получим период:

$$d = \frac{m\lambda}{\sin \alpha} = 2.8 \text{ мкм}$$

18.

Положение главных максимумов для волны для первой спектральной линии света:

$$Z \sin \theta = m\lambda_1, m = 0, 1, 2, 3$$

Максимум первого порядка соответствует  $m=1$

$$Z \sin \theta = \lambda_1$$

$$\frac{L}{N} \sin \theta = \lambda_1$$

$$L \sin \theta = N\lambda_1$$

$$N = \frac{L \sin \theta}{\lambda_1}$$

Согласно предельному критерию Рэля максимум совпадает с ближайшим минимумом второй спектральной линии света. Положение которого определено как:

$$Z \sin \theta = \frac{N-1}{N} \lambda_2$$

$$L \sin \theta = (N-1)\lambda_2 = \left( \frac{L \sin \theta}{\lambda_1} - 1 \right) \lambda_2$$

$$\Theta = \arcsin \left[ \frac{\lambda_2 \lambda_1}{L(\lambda_2 - \lambda_1)} \right]$$

$$\theta = 46,059 \text{ град}$$

19.

Центр фраунгоферовского максимума второго порядка наблюдается под углом  $\varphi_0$ , таким что:

$$d \sin \varphi_0 = 2\lambda$$

Положение прилегающих добавочных максимумов определено соотношениями:

$$d \sin \varphi_1 = (2N + 1) \frac{\lambda}{N}$$

$$d \sin \varphi_2 = (2N - 1) \frac{\lambda}{N}$$

$$d \sin(\varphi_0 + \Delta\varphi') = (2N + 1) \frac{\lambda}{N}$$

$$d \sin(\varphi_0 - \Delta\varphi'') = (2N - 1) \frac{\lambda}{N}$$

Полагаем углы  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\varphi''$  очень малыми:

$$\sin\varphi_0 + \cos\varphi_0\Delta\varphi' = (2N + 1) \frac{\lambda}{dN}$$

$$\sin\varphi_0 - \cos\varphi_0\Delta\varphi'' = (2N - 1) \frac{\lambda}{dN}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\cos\varphi_0} 2 \frac{\lambda}{dN}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\lambda}{d}\right)^2}} 2 \frac{\lambda}{dN}$$

$$\Delta\varphi = 11,01917$$

20.

При воздействии на вещество с однородно уширенной спектральной линией насыщающего монохроматического излучения, частота которого равна частоте максимума линии, ширина насыщенной линии описывается выражением

$$\Delta\omega_{21}^{Sat} = \Delta\omega_{21}^0 + 2W_{21,Stim}$$

Ширина ненасыщенной линии по условию

$$\Delta\omega_{21}^0 = 1 \text{ см}^{-1} = 6,28 \cdot 3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1} = 2 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$$

Вероятность вынужденного перехода:

$$W_{21,Stim} = \frac{\pi^2 c^2}{\hbar \omega_0^2 n^2 \tau_{21}^{sp}} q_{21}(\omega\omega_0)$$

$$q_{21}(\omega_0) = \frac{2}{\pi \Delta\omega_{21}}$$

Для излучения с частотой максимума линии:

$$W_{21,Stim} = \frac{2\pi^2 c^2}{\hbar\omega_0^2 n^2 \tau_{21}^{sp} \Delta\omega_{21}} I_{\omega_0}$$

По условию задачи

$$(\Delta\omega_{21}^{Sat} - \Delta\omega_{21}^0) / \Delta\omega_{21}^0 = 0,01$$

Используя вышеприведенные выражения получим:

$$2W_{21,Stim} = 0,01 \cdot \Delta\omega_{21}^0$$

$$\frac{2\pi^2 c^2}{\hbar\omega_0^2 n^2 \tau_{21}^{sp} \Delta\omega_{21}} I_{\omega_0} = 0,01 \cdot 10^{11} = 10^9$$

$$I_{\omega_0} = 10^9 \frac{\hbar\omega_0^2 n^2 \tau_{21}^{sp} \Delta\omega_{21}}{2\pi^2 c^2}$$

$$I_{\omega_n} = \omega_0^2 \times 10^{-36}$$

1. Дисперсионная длина  $L_D$  – это длина, на которой длительность первоначального импульса увеличивается в  $\sqrt{2}$  за счет дисперсии. Вычисления следует проводить по формуле

$$L_D = \frac{T_0^2}{\left| \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|}$$

Где  $T_0$  - начальная длительности импульса, параметр  $\left| \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|$  определяет величину дисперсии и имеет размерность  $\text{пс}^2/\text{км}$ . Этот параметр равен  $\beta_2$ .

Применяя эту формулу получаем что дисперсионная длина равна 324 км.

2. Зонная диаграмма указанной гетероструктуры представляет собой две потенциальные ямы, одна из которых, для электронов, расположена в зоне проводимости, другая, для дырок, в валентной зоне. Ширина  $a$  обеих потенциальных ям одинаковая, а поскольку считаем, что массы электронной и дырок одинаковые, обе ямы яв-

ляются симметричными, и их глубина  $U_0$  равна половине разности значений ширины запрещенной зоны ( $E_{g1} - E_{g2}$ ).

Для нахождения требуемых уровней энергии в потенциальной яме рассмотрим соответствующую задачу - потенциальную яму с конечной глубиной:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ U_0 & x < 0 \vee x > a \end{cases}$$

Из двух возможных задач: энергия  $E < U_0$ , что соответствует связанному состоянию, и  $E > U_0$  - задача о рассеянии частиц, нас интересует первая, так как именно она соответствует локализации носителей в квантовой яме.

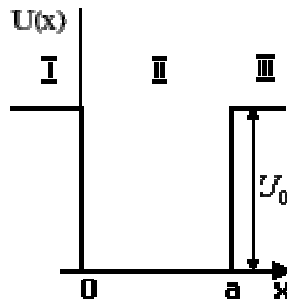


Рис.3 Потенциальная энергия в яме (стенки конечной высоты)

Уравнение Шредингера будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2}\Psi = 0$$

Во втором слагаемом коэффициент перед  $\Psi$  отрицателен. Обозначим его

$$\frac{2m(E - U_0)}{\hbar^2} = -k^2$$

Также введем обозначение

$$\beta^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Уравнения Шредингера вне и внутри ямы отличаются знаком перед  $\Psi$

$$1, 3) \quad \Psi'' - k^2\Psi = 0, \quad 2) \quad \Psi'' + \beta^2\Psi = 0$$

По условию задачи значение энергии локализованных носителей много меньше глубины ямы, поэтому можно воспользоваться для области II аппроксимацией бесконечной потенциальной ямы.

Тогда уравнение приобретает вид и имеет решение

$$\Psi'' + \beta^2\Psi = 0, \quad \Psi(x) = A\sin(\beta x + \alpha).$$

Постоянные  $A$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  можно найти из условий непрерывности волновой функции и нормировки. На левой границе  $\Psi(0) = A\sin(\alpha) = 0$  дает  $\alpha = 0$ . На правой границе  $\Psi(a) = A\sin(\beta a) = 0$  приводит к  $\beta a = \pi n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Нулевое значение  $n$  в ряд допустимых значений не входит, т.к. иначе волновая функция везде бы обращалась в ноль. Получаем, что

$$\Psi(x) = A\sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right).$$

Возведя в квадрат левую и правую части равенства  $\beta a = \pi n$ , и подставив обозначение  $\beta^2$ , получим выражение для энергии

$$E = \frac{\hbar^2}{8ma^2} n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Требуемая энергия перехода, по условию идущего между уровнями с мин энергией, является энергией при  $n = 1$ , т.е.

$$E = \frac{\hbar^2}{8ma^2}.$$

Получаем, что энергия перехода равна:

$$h\nu = E_{g2} + 2E = E_{g2} + \frac{\hbar^2}{4ma^2}.$$

Ответ:  $h\nu = E_{g2} + \frac{\hbar^2}{4ma^2}.$

23.

1) Выражение для частотного сдвига рассеянного излучения выглядит так:  $\Omega = 2\omega n(v/c)\sin(\theta/2)$ , где  $\omega$  – частота падающего света,  $\theta$  – угол рассеяния;

2)  $\omega = 2\pi c/\lambda = 2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^{10} / 5,32 \cdot 10^{-5} = 3,54 \cdot 10^{15}$  Гц;

$$3) \Omega = 2 \cdot 3,54 \cdot 10^{15} \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot 10^5 / 3 \cdot 10^{10} \cdot \sqrt{2} = 3,79 \cdot 10^{10} \text{ Гц} \sim 3,8 \cdot 10^{10} \text{ Гц.}$$

## 2.4. Задачи госэкзаменов на кафедре оптики и спектроскопии для бакалавров (2011 – 2015)

1. Формула преобразования частоты за счет эффекта Доплера

имеет вид  $\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta}$ . По условию  $\vartheta = \pi/2$ , следовательно

$\cos \vartheta = 0$ . Значит  $\nu' = \nu \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Выразим длину волны через частоту, получим  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ ,  $\nu' = \frac{c}{\lambda'}$  т.е.  $\frac{\lambda'}{\lambda} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ . Разложив выражение в скобках в ряд, учитывая, что  $v \ll c$ ,

$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{v^4}{c^4}\right) + \dots$ , и ограничиваясь вторым порядком, получим  $\frac{\lambda'}{\lambda} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ . Учитывая, что  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ , можем

переписать полученное выражение в виде  $\frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ , или

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ . Выразив из формулы кинетической энергии

$T = \frac{mv^2}{2}$  квадрат скорости  $v^2 = \frac{2T}{m}$ , получим значение сдвига дли-

ны волны  $\Delta\lambda = \lambda \frac{T}{mc^2}$ .

2. Эффект Зеемана – это расщеплению спектральных линий во внешнем магнитном поле. К нему приводит снятие вырождения по проекции момента. В результате спектральная линия в магнитном поле расщепляется на несколько компонент. В соответствии с



классической электронной теорией Лоренца в магнитном поле происходит расщепление линии на три компоненты, одна из которых характеризуется несмещенной частотой  $\omega_0$ , а две другие смещены на величину  $\Omega = eH/(2mc)$ :  $\omega = \omega_0 \pm \Omega$ . Такая картина расщепления представляет собой нормальный (простой) эффект Зеемана и называется нормальным триплетом Лоренца.

Значительно чаще, однако, наблюдается аномальный (сложный) эффект Зеемана, когда число компонент расщепления отлично от трех, либо равно трем, но величина расщепления не совпадает с предсказаниями классической теории.

Рассмотрим картину расщепления головной линии серии Лаймана в спектре атома водорода. Серию Лаймана (Ly) атома водорода и водородоподобных ионов составляют переходы на первый уровень,  $n \rightarrow 1$ , где главное квантовое число верхнего уровня, или его номер  $n$ , принимает значения 2, 3, 4, 5 и т.д. Первые несколько переходов любой серии нумеруются буквами греческого алфавита. Головная линия серии Лаймана ( $Ly_\alpha$ ) соответствует переходу со второго ( $n = 2$ ) на первый уровень.

В отсутствие внешнего магнитного поля указанная линия имеет дублетную структуру:  $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ ,  $2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ . Требуется рассчитать структуру расщепления каждой из дублета в магнитном поле. При наличии магнитного поля каждое из состояний расщепляется на  $2j_1 + 1$  и  $2j_2 + 1$  подуровней, где  $j_1$  и  $j_2$  – квантовые числа, соответствующие полным механическим моментам первого и второго состояний соответственно. Следовательно, основное состояние  $1s_{1/2}$  расщепляется в магнитном поле на два подуровня, состояния  $2p_{1/2}$  и  $2p_{3/2}$  расщепляются, соответственно, на два и четыре подуровня. Учитывая правила отбора  $\Delta m_j = m_{j2} - m_{j1} = 0, \pm 1$ , получим, что линия  $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$  расщепляется на четыре компоненты, а линия  $2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$  – на шесть компонент. Общее число компонент оказывается равно десяти.

Картина расщепления и разрешенные переходы между зеемановскими подуровнями приведены на рис.а.

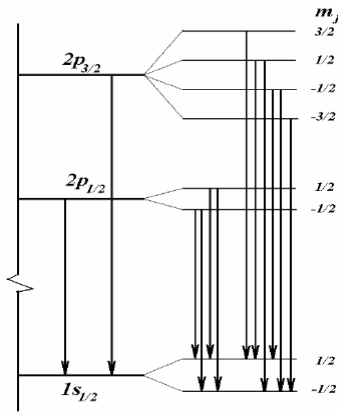


Рис. а. Эффект Зеемана на линии  $Ly_\alpha$  атома водорода.

Спектральный состав показан на рис. б. Величина расщепления в дублете  $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ ,  $2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$  в отсутствие внешнего магнитного поля составляет  $\alpha^2 Ry/16$  (рис.б). Магнитное поле при эффекте Зеемана считается слабым, что означает, что его не позволяет пренебречь спин-орбитальным взаимодействием электронов в атоме (величина напряженности магнитного поля может оцениваться как  $H^* \approx \alpha^2 Ry/16 \mu_B$ , и не должна сильно превышать это значение).

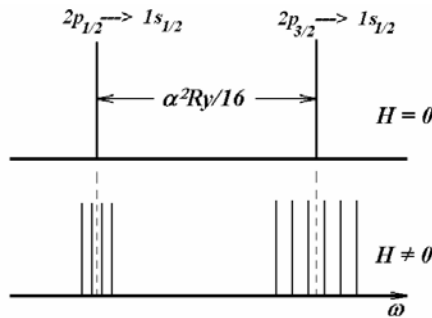


Рис. б. Спектральный состав линии  $Ly_\alpha$  атом водорода в слабом магнитном поле (эффект Зеемана).

3. В 1912 году Пашен и Бак при наблюдении эффекта Зеемана в сильном магнитном поле обнаружили, что любая спектральная линия расщепляется на нормальный триплет Лоренца, т.е. всегда наблюдается нормальный эффект Зеемана. Это явление называется эффектом Пашена и Бака. Причиной этого явления является то, что в сильном магнитном поле можно пренебречь спин – орби-

тальным взаимодействием в атоме, поэтому для частоты перехода в сильном магнитном поле можно записать:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 + \mu_B H(\Delta m_l + 2\Delta m_s).$$

Учитывая правила отбора:  $\Delta m_l = 0, \pm 1$ , а  $\Delta m_s = 0$ , получаем, что  $\omega = \omega_0$ ,  $\omega_0 \pm \Omega$ , то есть нормальный триплет Лоренца.

Рассмотрим эффект Пашена и Бака на головной линии *серии Лаймана* в спектре атома водорода. Серию Лаймана (Ly) атома водорода и водородоподобных ионов составляют переходы на первый уровень,  $n \rightarrow 1$ , где главное квантовое число верхнего уровня, или его номер  $n$ , принимает значения 2, 3, 4, 5 и т.д. Первые несколько переходов любой серии нумеруются буквами греческого алфавита. Головная линия серии Лаймана ( $Ly_\alpha$ ) соответствует переходу со второго ( $n = 2$ ) на первый уровень.

В отсутствие внешнего магнитного поля указанная линия имеет дублетную структуру:  $2p_{1/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ ,  $2p_{3/2} \rightarrow 1s_{1/2}$ .

Поскольку величина тонкого расщепления данного дублета составляет  $\alpha^2 Ry/16$ , то эффект Пашена и Бака будет наблюдаться при значении напряженности внешнего магнитного поля  $H \gg H^* \approx \alpha^2 Ry/16 \mu_B$ .

В результате спин-орбитальным взаимодействием можно пренебречь, и уровень  $1s$  распадётся на два подуровня, а уровень  $2p$  – на шесть подуровней, два из которых –  $m_l = 1$ ,  $m_s = 1/2$  и  $m_l = -1$ ,  $m_s = -1/2$  – совпадают между собой.

Схема атомных уровней с учетом расщепления в сильном магнитном поле и возможные переходы с учетом правил отбора  $\Delta m_l = 0, \pm 1$ , а  $\Delta m_s = 0$  представлены на рис. а.

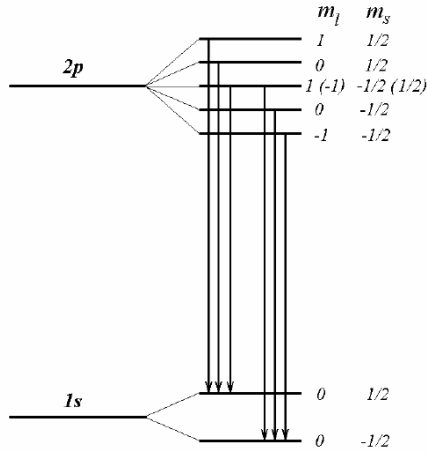
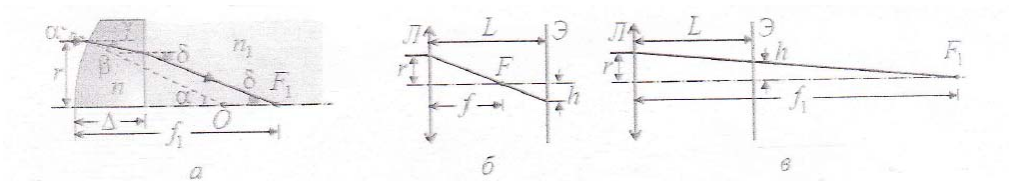


Рис.а. Эффект Пашена-Бака на линии  $Ly_{\alpha}$  атома водорода.

Казалось бы, число компонент, на которые произойдет расщепление линии  $2p \rightarrow 1s$ , равно шести. Однако среди частот этих переходов есть попарно совпадающие между собой, так что общее число наблюдаемых линий оказывается равно трем.

4. На рисунке а показан ход крайнего луча падающего на линзу пучка света в случае, когда показатель преломления среды за линзой равен  $n_1$ , а перед линзой находится воздух. Так как оп условию пучок света узкий, а линза тонкая, то все углы на рисунке являются малыми, мала и толщина  $\Delta$  линзы по сравнению с ее фокусным расстоянием. Согласно закону преломления  $\beta = \frac{\alpha}{n}$ ,

$$\delta = \gamma \frac{n}{n_1}. \text{ Поскольку } \gamma = \alpha - \beta = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\alpha, \text{ то } \delta = \frac{n-1}{n_1} \alpha.$$



Учитывая, что  $r = \alpha R = \delta f_1$ , получаем, что в рассматриваемом случае падающий пучок должен собираться за линзой на расстоянии  $f_1 = R \frac{n_1}{n-1}$ . Если же линза находится в воздухе, то ее фокусное

расстояние равно  $f = \frac{R}{n-1}$ . Согласно рисункам б и в

$$\frac{h}{r} = \frac{L-f}{f} = \frac{f_1-L}{f_1}, \quad \text{а потому} \quad \frac{1}{f} + \frac{1}{f_1} = \frac{2}{L}. \quad \text{Следовательно,}$$

$$R = \frac{L}{2}(n-1) \left( 1 + \frac{1}{n_1} \right).$$

5. Дисперсионная длина  $L_D$  – это длина, на которой длительность первоначального импульса увеличивается в  $\sqrt{2}$  за счет дисперсии. Вычисления следует проводить по формуле  $L_D = \frac{T_0^2}{\left| \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|}$ .

Где  $T_0$  – начальная длительности импульса, параметр  $\left| \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|$  определяет величину дисперсии и имеет размерность пс<sup>2</sup>/км. Этот параметр равен  $\beta_2$ .

Применяя эту формулу, получаем, что дисперсионная длина равна 324 км.

6. Угол рассеяния определяется по формуле  $\cos \vartheta = \frac{c}{nv}$ , откуда

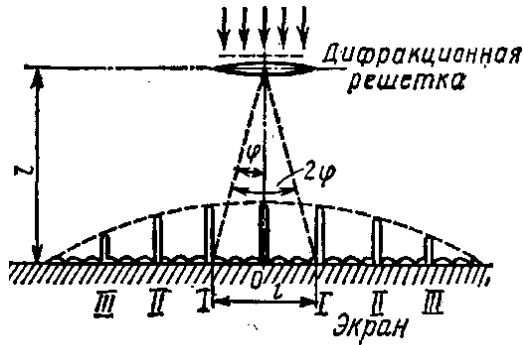
следует, что скорость  $v = \frac{c}{n \cos \vartheta}$ . Получается, что скорость дости-

гает минимального значения  $v_{\min} = \frac{c}{n}$  при  $\cos \vartheta = 1$ . Минимальное

значение скорости соответствует минимальному значению им-

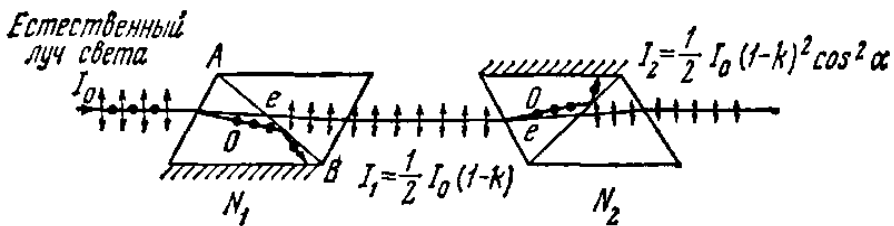
$$\text{пульса } p_{\min} = \frac{mc}{n \sqrt{1 - \left( \frac{v_{\min}}{c} \right)^2}} = \frac{mc}{n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}.$$

7. Постоянная  $d$  дифракционной решетки, длина волны  $\lambda$  и угол  $\varphi$  отклонения лучей, соответствующий  $k$ -му дифракционному максимуму, связаны соотношением  $d \sin \varphi = k\lambda$ , где  $k$  – порядок спектра, или в случае монохроматического света порядок максимума.



В данном случае  $k=1$ ,  $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi$  (ввиду того, что  $l/2 \ll L$ ),  $\operatorname{tg}\varphi = (l/2)L$ .  
 С учетом последних трех равенств имеем  $d \frac{l}{2L} = \lambda$ , откуда постоянная решетки  $d=2L\lambda/l$ .

8. Пучок естественного света, падая на грань николя  $N_1$  (рисунок), расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два пучка: обыкновенный и необыкновенный. Оба пучка одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы. Плоскость колебаний для необыкновенного пучка лежит в плоскости чертежа (плоскость главного сечения). Плоскость колебаний для обыкновенного пучка перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный пучок ( $o$ ) вследствие полного отражения от границы  $AB$  отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный пучок ( $e$ ) проходит через николю. При этом интенсивность света уменьшается вследствие поглощения в веществе николя.



Таким образом, интенсивность света, прошедшего через николю  $N_1$ ,  $I_1 = 1/2 I_0 (1-k)$ , где  $k=0,05$  – относительная потеря интенсивности

света в николе;  $I_0$  – интенсивность естественного света, падающего на николь  $N_1$ .

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность  $I_0$  естественного света на интенсивность  $I_1$  поляризованного света:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{I_0}{1/2 I_0 (1-k)} = \frac{2}{1-k}.$$

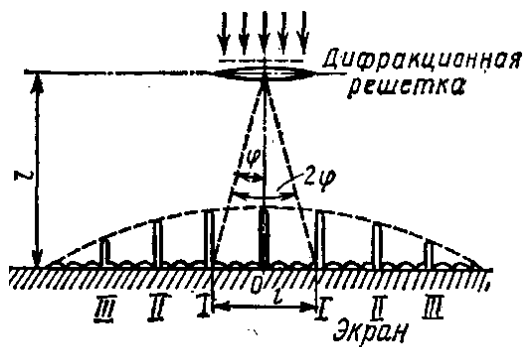
Подставив числовые значения, найдем  $I_0/I_1=2,10$ .

Таким образом, интенсивность света при прохождении через николь  $N_1$  уменьшается в 2,10 раза.

9. Постоянная  $d$  дифракционной решетки, длина волны  $\lambda$  и угол  $\varphi$  отклонения лучей, соответствующий  $k$ -му дифракционному максимуму, связаны соотношением  $d \sin \varphi = k\lambda$ , где  $k$  – порядок спектра, или в случае монохроматического света порядок максимума.

В данном случае  $k=1$ ,  $\sin \varphi = \text{tg} \varphi$  (ввиду того, что  $l/2 \ll L$ ),  $\text{tg} \varphi = (l/2)L$ .

С учетом последних трех равенств имеем  $d \frac{l}{2L} = \lambda$ , откуда постоянная решетки  $d=2L\lambda/l$ .



Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение  $k_{max}$  исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать  $90^\circ$ .

Из формулы  $d \sin \varphi = k\lambda$  запишем  $k_{max} = \frac{d}{\lambda} \sin \varphi$ . Подставляя сюда значения величин, получим  $k_{max} = 9,9$ .

Число  $k$  обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 10, так как при этом значении  $\sin\varphi$  должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно,  $k_{max}=9$ .

Определим общее число максимумов дифракционной картины, полученной посредством дифракционной решетки. Влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться по одинаковому числу максимумов, равному  $k_{max}$ , т. е. всего  $2k_{max}$ . Если учесть также центральный нулевой максимум, получим общее число максимумов  $N=2k_{max}+1$ .

Подставляя значение  $k_{max}$  найдем  $N=2\times 9+1=19$ .

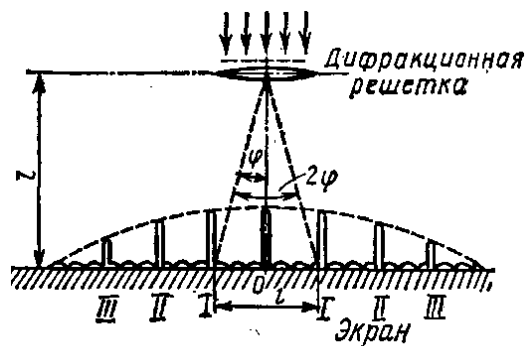
10. Постоянная  $d$  дифракционной решетки, длина волны  $\lambda$  и угол  $\varphi$  отклонения лучей, соответствующий  $k$ -му дифракционному максимуму, связаны соотношением  $d\sin\varphi=k\lambda$ , где  $k$  – порядок спектра, или в случае монохроматического света порядок максимума.

В данном случае  $k=1$ ,  $\sin\varphi=\text{tg}\varphi$  (ввиду того, что  $l/2 \ll L$ ),  $\text{tg}\varphi=(l/2)L$ .

С учетом последних трех равенств имеем  $d \frac{l}{2L} = \lambda$ , откуда постоянная решетки  $d=2L\lambda/l$ .

Для определения максимального угла отклонения лучей, соответствующего последнему дифракционному максимуму, выразим из соотношения  $d\sin\varphi=k\lambda$  синус этого угла  $\sin\varphi_{max}=k_{max}\lambda/d$ .

Отсюда  $\varphi_{max}=\arcsin(k_{max}\lambda/d)$ .

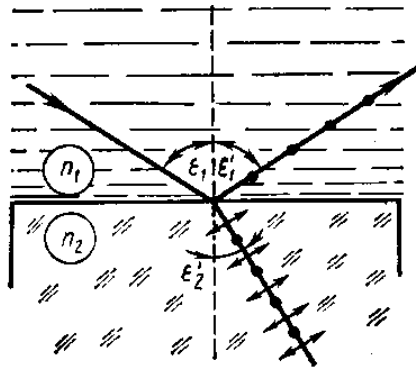


Вычислим максимальное значение  $k_{max}$  исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать  $90^\circ$ .



Из формулы  $d \sin \varphi = k \lambda$  запишем  $k_{\max} = \frac{d}{\lambda} \sin \varphi$ . Подставляя сюда значения величин, получим  $k_{\max} = 9,9$ . Число  $k$  обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 10, так как при этом значении  $\sin \varphi$  должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно,  $k_{\max} = 9$ . Подставив в выражение  $\varphi_{\max} = \arcsin(k_{\max} \lambda / d)$  значения величин  $\lambda$ ,  $d$ ,  $k_{\max}$  и произведя вычисления, получим  $\varphi_{\max} = 65,4^\circ$ .

11. Согласно закону Брюстера, свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован в том случае, если тангенс угла падения  $\operatorname{tg} \varepsilon_{1B} = n_{21}$ , где  $n_{21}$  – относительный показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости).



Относительный показатель преломления равен отношению абсолютных показателей преломления этих сред. Следовательно,  $\operatorname{tg} \varepsilon_{1B} = n_2 / n_1$ .

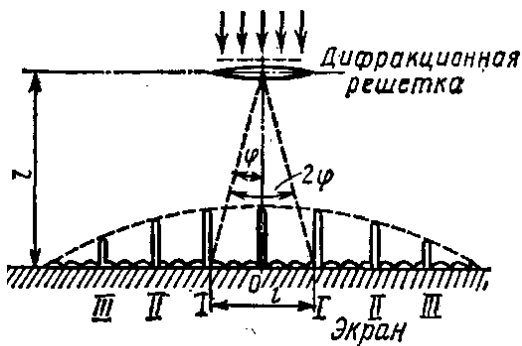
Согласно условию задачи, отраженный луч повернут на угол  $\varphi$  относительно падающего луча. Так как угол падения равен углу отражения, то  $\varepsilon_{1B} = \varphi / 2$  и, следовательно,  $\operatorname{tg}(\varphi / 2) = n_2 / n_1$ , откуда  $n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg}(\varphi / 2)}$ .

Сделав подстановку числовых значений, получим  $n_1 = 1,33$ .

12. Постоянная  $d$  дифракционной решетки, длина волны  $\lambda$  и угол  $\varphi$  отклонения лучей, соответствующий  $k$ -му дифракционному максимуму, связаны соотношением  $d \sin \varphi = k \lambda$ , где  $k$  – порядок

спектра, или в случае монохроматического света порядок максимума.

В данном случае  $k=1$ ,  $\sin\varphi=\text{tg}\varphi$  (ввиду того, что  $l/2 \ll L$ ),  $\text{tg}\varphi=(l/2)L$ .

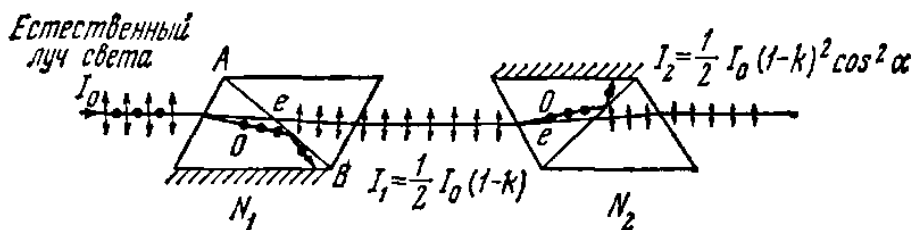


С учетом последних трех равенств имеем  $d \frac{l}{2L} = \lambda$ ,

откуда постоянная решетки  $d = 2L\lambda/l$ .

Число штрихов на 1 см найдем из формулы  $n=1/d$ . После подстановки числовых значений получим  $n=2,02 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ .

13. Пучок естественного света, падая на грань николя  $N_1$  (рисунок), расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два пучка: обыкновенный и необыкновенный. Оба пучка одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы. Плоскость колебаний для необыкновенного пучка лежит в плоскости чертежа (плоскость главного сечения). Плоскость колебаний для обыкновенного пучка перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный пучок ( $o$ ) вследствие полного отражения от границы  $AB$  отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный пучок ( $e$ ) проходит через николь. При этом интенсивность света уменьшается вследствие поглощения в веществе николя.



Таким образом, интенсивность света, прошедшего через николь  $N_1$ ,  $I_1=1/2I_0(1-k)$ , где  $k=0,05$  – относительная потеря интенсивности света в николе;  $I_0$  – интенсивность естественного света, падающего на николь  $N_1$ . Относительное уменьшение интенсивности света

получим, разделив интенсивность  $I_0$  естественного света на интенсивность  $I_1$  поляризованного света:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{I_0}{1/2I_0(1-k)} = \frac{2}{1-k}.$$

Подставив числовые значения, найдем  $I_0/I_1=2,10$ .

Таким образом, интенсивность света при прохождении через николю  $N_1$  уменьшается в 2,10 раза.

Пучок плоскополяризованного света интенсивности  $I_1$  падает на николю  $N_2$  и также расщепляется на обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный пучок полностью поглощается в николе, а интенсивность необыкновенного пучка света, вышедшего из николя, определяется законом Малюса (без учета поглощения в этом николе):  $I_2=I_1\cos^2\alpha$

где  $\alpha$  – угол между плоскостью колебаний в поляризованном пучке и плоскостью пропускания николя  $N_2$ . Учитывая потери интенсивности во втором николе, получим

$$I_2=I_1(l-k)\cos^2\alpha.$$

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность  $I_0$  естественного света на интенсивность  $I_2$  света, прошедшего систему из двух николей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1(1-k)\cos^2\alpha}.$$

Подставив выражение для  $I_0/I_1$ , равное  $\frac{I_0}{I_1} = \frac{I_0}{1/2I_0(1-k)} = \frac{2}{1-k}$  полу-

чим  $\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha}$ .

Подставив данные, произведем вычисления:  $\frac{I_0}{I_2} = 8,86$ .

Таким образом, после прохождения света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.

14. Отношение интенсивности  $I_e$  естественного света к интенсивности  $I_e$  поляризованного света найдем из следующих соображений. При первоначальном положении николя он полностью пропустит линейно-поляризованный свет и половину интенсивности естественного света. Общая интенсивность пропущенного при

этом света равна  $I_1 = I_n + \frac{1}{2}I_e$ .

При втором положении николя интенсивность пропущенного поляризованного света определится по закону Малюса, а интенсивность пропущенного естественного света, как и в первом случае, будет равна половине интенсивности естественного света, падающего на николю. Общая интенсивность во втором случае равна

$$I_2 = I_n \cos^2 \varphi + \frac{1}{2}I_e$$
$$I_n + \frac{1}{2}I_e = k \left( I_n \cos^2 \varphi + \frac{1}{2}I_e \right)$$

В соответствии с условием задачи  $I_1 = k \times I_2$ .

Подставив сюда значение угла  $\varphi$ ,  $k$  и произведя вычисления, получим  $I_e/I_n=1$ , или  $I_e=I_n$ , т. е. интенсивности естественного и поляризованного света в заданном пучке равны между собой.

Степень поляризации частично-поляризованного света определяется соотношением

$$P = (I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min}),$$

где  $I_{max}$  и  $I_{min}$  – соответственно максимальная и минимальная интенсивности света, пропущенного через николю.

Максимальная интенсивность  $I_{max} = I_1 = I_n + \frac{1}{2}I_e$ , или, учитывая, что  $I_e = I_n$  получаем  $I_{max} = 3/2 \times I_n$ .

Минимальная интенсивность соответствует положению николя, при котором плоскость пропускания его перпендикулярна плоскости колебаний линейно-поляризованного света. При таком положении николя поляризованный свет будет полностью погашен и через николю пройдет только половина интенсивности естественного света. Общая интенсивность выразится равенством  $I_{min} = \frac{1}{2}I_e = \frac{1}{2}I_n$ .

$$P = \frac{3/2I_n - 1/2I_n}{3/2I_n + 1/2I_n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, степень поляризации пучка света  $P = \frac{1}{2}$ .

15. Угол поворота плоскости поляризации кварцевой пластинкой определяется соотношением  $\varphi = \alpha \times d$ .

Пользуясь этой формулой, выразим искомую толщину  $d_2$  пластин-

ки  $d_2 = \varphi_2 / \alpha$ , где  $\varphi_2$  – угол поворота плоскости поляризации, при котором свет будет полностью погашен ( $\varphi_2 = 90^\circ$ ).

Постоянную вращения  $\alpha$  для кварца найдем также из формулы  $\varphi = \alpha \times d$ , подставив в нее заданные в условии задачи значения  $d_1$  и  $\varphi_1 / \alpha = \varphi_1 / d_1$ .

Подставив это выражение  $\alpha$  в формулу для  $d_2(1)$ , получим  $d_2 = (\varphi_2 / \varphi_1) d_1$ .

Произведя вычисления по этой формуле, найдем толщину пластинки:  $d_2 = 4,5$  мм.

16. Длину трубки с сахарным раствором найдем из соотношения  $\varphi_2 = [\alpha]Cd$ , выражающего угол поворота плоскости поляризации раствором сахара, где  $d$  – толщина раствора сахара (принимается равной длине  $l$  трубки). Отсюда получим  $l = \varphi_2 / ([\alpha]C)$ .

Подставив сюда значения  $\varphi_2$ ,  $[\alpha]$ ,  $C = 0,4$  кг/л  $= 400$  кг/м<sup>3</sup> и производя вычисления, найдем  $l = 3,8$  дм.

17.  $\lambda = 0,95$  мкм:  $M = \frac{V^2}{2} \times V = \frac{2\pi\alpha}{\lambda} \sqrt{n_c^2 - n_0^2} = 0,90$ , т.е.  $M = 0,40$ ,

следовательно, имеем одномодовый режим.  $\lambda = 1,55$  мкм:

$M = \frac{V^2}{2} \times V = \frac{2\pi\alpha}{\lambda} \sqrt{n_c^2 - n_0^2} = 0,55$ , т.е.  $M = 0,15$ . Следовательно, имеем одномодовый режим.

18. Тормозное рентгеновское излучение возникает за счет энергии, теряемой электроном при торможении. В рентгеновской трубке электрон приобретает кинетическую энергию  $T$ , которая связана с ускоряющей разностью потенциалов  $U$  соотношением  $T = |e|U$ , где  $e$  – заряд электрона.

В соответствии с законом сохранения энергии энергия фотона не может превысить кинетической энергии электрона ( $\hbar\omega \leq T$ ). Максимальная энергия фотона в этом случае определяется равенством  $\hbar\omega = T = |e|U$ .

Так как максимальная угловая частота  $\omega_{\max}$  связана с минимальной длиной волны  $\lambda_{\min}$  соотношением  $\lambda_{\min} = 2\pi c / \omega_{\max}$ , то из выражений выше находим:

$$U = \frac{2\pi\hbar c}{|e|U}$$

Произведем вычисления, получим:

$$U = \frac{2 \times 3,14 \times 1,05 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1,60 \times 10^{-19} \times 1,55 \times 10^{-11}} B = 7,98 \times 10^4 B = 79,8 \text{ кВ}.$$

19. Концентрация  $n$  фотонов в пучке может быть найдена, как частное от деления объемной плотности энергии  $\omega$  на энергию  $\epsilon$  одного фотона  $n = \omega / \epsilon$ .

Из формулы  $p = \omega(1 + \rho)$ , определяющей давление света, где  $\rho$  – коэффициент отражения, найдем  $\omega = p / (\rho + 1)$ .

Подставив выражение для  $\omega$  формулу для  $n$ , получим  $n = p / [(\rho + 1) \times \epsilon]$ .

Энергия фотона зависит от частоты  $\nu$ , а следовательно, и от длины световой волны  $\lambda$ :

$$\epsilon = h\nu = hc/\lambda.$$

Подставив выражение для энергии фотона в формулу для  $n$ , определим искомую концентрацию фотонов

$$n = (p\lambda) / [(\rho + 1) \times \epsilon].$$

Коэффициент отражения  $\rho$  для зачерненной поверхности принимаем равным нулю. Подставив числовые значения в формулу для  $n$ , получим  $n = 2,52 \times 10^{13} \times \text{м}^{-3}$ .

20. Число  $n_1$  фотонов, падающих на поверхность площадью  $1 \text{ м}^2$  за время  $1 \text{ с}$ , найдем из соотношения  $n_1 = N / (St)$ , где  $N$  – число фотонов, падающих за время  $t$  на поверхность площадью  $S$ .  $N = ncSt$ , где  $n$  – концентрация фотонов в пучке. Следовательно,  $n_1 = (ncSt) / (St) = nc$ .

Концентрация  $n$  фотонов в пучке может быть найдена, как частное от деления объемной плотности энергии  $\omega$  на энергию  $\epsilon$  одного фотона  $n = \omega / \epsilon$ .

Из формулы  $p = \omega(1 + \rho)$ , определяющей давление света, где  $\rho$  – коэффициент отражения, найдем  $\omega = p / (\rho + 1)$ . Подставив выражение для  $\omega$  формулу для  $n$ , получим  $n = p / [(\rho + 1) \epsilon]$ .

Энергия фотона зависит от частоты  $\nu$ , а следовательно, и от длины световой волны  $\lambda$ :  $\epsilon = h\nu = hc/\lambda$ .

Подставив выражение для энергии фотона в формулу для  $n$ , опре-

делим искомую концентрацию фотонов  $n=(\rho\lambda)/[(\rho+1)\epsilon]$ .

Коэффициент отражения  $\rho$  для зачерненной поверхности принимаем равным нулю. Подставив числовые значения в формулу для  $n$ , получим  $n=2,52\times 10^{13}\text{ м}^{-3}$ .

Подставив в выражение для  $n_1$  значения  $n$  и  $c$ , получим  $n_1=7,56\times 10^{21}\text{ м}^{-2}\times\text{с}^{-1}$ .

## Литература

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики Изд. 2-е. Перевод с английского. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
2. Алешкевич В.А. Оптика. М.: Физматлит, 2010.
3. Янг М. Оптика и лазеры, включая волоконную оптику и оптические волноводы. М.: Мир, 2005.
4. Воронин В.Г., Наний О.Е. Основы нелинейной волоконной оптики. М.: Университетская книга, 2011.
5. Желтиков А.М. Микроструктурированные световоды в оптических технологиях. М.: Физматлит., 2009.
6. Исаев С.К. Физика волоконно-оптических устройств, М.: Издательство МГУ, 1986.
7. Гладышевский М.А., Наний О.Е., Щербаткин Д.Д. Волоконная оптика. М.: В и Ко, 2002.
8. Воронин В.Г., Наний О.Е., Кулик А.А., Туркин А.Н. Оптический рефлектометр. М.: Издательство МГУ, 2007.
9. Наний О.Е., Туркин А.Н. Оптические методы в информатике. М.: Университетская книга, 2010.
10. Наний О.Е., Волков В.Г., Воронин В.Г., Камынин В.А. Исследование распространения световых импульсов в оптических волокнах. М.: Университетская книга, 2011.
11. Воронин В.Г., Наний О.Е., Кулик А.А., Туркин А.Н. Оптический рефлектометр. М.: Университетская книга, 2007.
12. Салех Б., Тейх М. Оптика и фотоника, принципы и применения. Том 1. Перевод с английского. ИД Интеллект, Долгопрудный 2012.
13. Звелто О. Принципы лазеров. Издание четвертое. М.: Издательство «Лань», 2008.
14. Пихтин А.Н. Оптическая и квантовая электроника. М.: Высшая школа, 2001.
15. Быков В.П., Силичев О.О. Лазерные резонаторы. М.: Физматлит, 2003.



16. Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г. Физика полупроводников. М: Наука, 1977.
17. Шуберт Ф.Е. Светодиоды. Перевод с английского под редакцией д.ф.-м.н., профессора А.Э.Юновича. М.: Физматлит, 2008.
18. Юнович А.Э. Двумерные структуры и сверхрешетки в полупроводниках. Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Москва, 2016.
19. Юнович А.Э. Оптические явления в полупроводниках. Часть 1. М.: Изд. МГУ, 1988.
20. Юнович А.Э. Оптические явления в полупроводниках. Часть 2. М.: Изд. МГУ, 1991.
21. Ельяшевич М.А. Атомная и молекулярная спектроскопия: общие вопросы спектроскопии. Изд.6, URSS, 2012, 240 с.
22. Ельяшевич М.А. Атомная и молекулярная спектроскопия: атомная спектроскопия. Изд.6, URSS, 2012, 416 с.
23. Ельяшевич М.А. Атомная и молекулярная спектроскопия: молекулярная спектроскопия. Изд.6, URSS, 2012, 528 с.
24. Браун П.А., Киселев А.А. Введение в теорию молекулярных спектров. Ленинград, Издательство Ленинградского университета, 1983.
25. Банкер Ф. Симметрия молекул и молекулярная спектроскопия. М.: Мир, 1981.
26. Попов А.М., Тихонова О.В. Лекции по атомной физике. М.: 2007.