

Воздействие света на квантовые системы и материальные среды

П.В. Короленко

А.Ю. Мишин

Москва
2022

УДК 535
ББК 22.343
К 68

Короленко П.В., Мишин А.Ю.

Воздействие света на квантовые системы и материальные среды. М.: физический факультет МГУ.

Изложен курс лекций по использованию квантовых представлений в теории взаимодействия светового излучения с веществом.

Для студентов и аспирантов, специализирующихся в области физической оптики и квантовой электроники.

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Общая характеристика метода анализа	6
§ 1.1. Стационарное уравнение Шредингера. Энергетический спектр	6
§ 1.2. Поведение микросистемы при нестационарном воздействии	7
Глава 2. Квазиклассическая теория дипольных переходов в двухуровневой системе	9
§ 2.1. Резонансное приближение	9
§ 2.2. Гамильтониан атома в поле излучения	10
§ 2.3. Осцилляции заселённости в резонансном поле	11
§ 2.4. Поляризация среды при интенсивном взаимодействии	14
§ 2.5. Импульсное воздействие	16
§ 2.6. Когерентное затухание нутаций	17
§ 2.7. Фотонное эхо	18
Глава 3. Релаксационные процессы	21
§ 3.1. Формализм матрицы плотности. Продольная и поперечная релаксации	21
§ 3.2. Уравнения для поляризации, заселённости и поля при наличии релаксации	23
§ 3.3. Другие способы учёта релаксации. Оптическое уравнение Блоха	25
Глава 4. Восприимчивость двухуровневой системы	26
§ 4.1. Поглощение и дисперсия	26
§ 4.2. Однородное и неоднородное уширение	28
§ 4.3. Эффекты насыщения	31
§ 4.4. Солитоны	32
§ 4.5. Насыщение усиления в системе вырожденных уровней	34
§ 4.6. Нелинейная поляризация среды и нелинейные оптические явления	36
Глава 5. Анализ квантовых переходов в различных порядках теории возмущений	38
§ 5.1. Определение вероятности перехода методом последовательных приближений	38
§ 5.2. Переходы в «размытые» состояния в первом порядке теории возмущений	39
§ 5.3. Переходы через виртуальные состояния	41
Глава 6. Описание процессов взаимодействия излучения с веществом в случае, когда среда и поле квантуются	42
§ 6.1. Метод вторичного квантования	42
§ 6.2. Гамильтониан электрона в поле квантованного излучения	44
§ 6.3. Поглощение и испускание фотонов	46
§ 6.4. Рассеяние света как двухфотонный процесс	48
§ 6.5. Многофотонный резонанс	51
Глава 7. Светодинамика атомов	52
§ 7.1. Сила светового давления	52
§ 7.2. Ускорение и замедление атомов в световом поле	54

§ 7.3. Светоиндуцированный дрейф в смеси атомов _____	55
<i>Глава 8. Взаимодействие световых волн со свободными электронами</i> _	55
<i>Глава 9. Особенности взаимодействия излучения с металлами и полупроводниками</i> _____	57
§ 9.1. Элементы металлооптики _____	57
§ 9.2. Механизм поглощения света и передачи энергии в полупроводниках _	62
<i>Глава 10. Взаимодействие с веществом сверхсильных электромагнитных полей</i> _____	66
<i>Примечания</i> _____	84
<i>Список основной литературы</i> _____	84
<i>Список дополнительной литературы</i> _____	85

Введение

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, аспирантов и стажёров, специализация которых предполагает подготовку в области оптики, физики лазеров и взаимодействия лазерного излучения с веществом. Работа с ним требует предварительного знакомства с физической оптикой в рамках курса общей физики, а также определённых знаний по электродинамике и квантовой механике.

Материал пособия объединён общностью подхода к описанию механизма взаимодействия электромагнитного поля и среды распространения. Используемый формализм опирается на аппарат волновой квантовой механики, позволяющий при помощи уравнения Шредингера оценить вероятность тех или иных оптических переходов в атомах или молекулах. При этом частицы вещества рассматриваются в качестве абстрактных квантовомеханических систем, состояния которых характеризуются набором волновых функций и энергетических уровней. Поскольку главной целью данной части курса является знакомство с основными методами анализа разнообразных оптических процессов в веществе, описание самих оптических явлений сведено к минимуму. Обсуждаются только те из них (оптические нутации, фотонное эхо, комбинационное рассеяние и т.п.), которые непосредственно иллюстрируют рассматриваемые фундаментальные закономерности.

Для облегчения читателю работы с литературой, углубления знаний и знакомства со смежными вопросами каждая глава имеет ссылки на монографии и учебные руководства, с использованием материала которых она написана. При этом по возможности сохранены обозначения и символы, используемые в литературных источниках. Таким образом, материал пособия можно рассматривать и как введение к большой и многообразной литературе по проблеме взаимодействия оптического излучения с веществом.

Глава 1. Общая характеристика метода анализа

§ 1.1. Стационарное уравнение Шредингера. Энергетический спектр

Обеспечить достаточно общий подход к анализу весьма многообразных явлений, связанных с взаимодействием световой волны с веществом, можно лишь абстрагируясь от конкретных деталей, присущих атому или молекуле. В теории, которой мы будем следовать, эти частицы будут рассматриваться в виде квантовых микросистем, находящихся в отсутствии электромагнитного поля в одном из возможных стационарных состояний, каждое из которых характеризуется определённой волновой функцией и соответствующей энергией.

Если задать оператор Гамильтона \hat{H}_0 , характеризующий энергию микросистемы в отсутствие переменных внешних полей, то волновые функции отдельных состояний φ_k могут быть определены из стационарного уравнения Шредингера

$$\hat{H}_0 \varphi_k(q) = E_k \varphi_k(q). \quad (1.1.1)$$

Отсюда видно, что функции $\varphi_k(q)$ являются собственными функциями оператора \hat{H}_0 , а собственные значения этого оператора E_k определяют уровень энергии каждого состояния. Функции $\varphi_k(q)$ не зависят от времени, q обозначает всю совокупность пространственных координат, необходимых для описания системы¹.

Стационарное состояние с наименьшим из всех возможных значений энергии считают основным, а все остальные – возбуждёнными. Среди различных стационарных состояний могут найтись соответствующие одним и тем же значениям энергии, отличаясь при этом значениями других величин. Такие значения (уровни) называются вырожденными. Множество всех возможных значений энергии, отвечающих стационарным состояниям, формируют энергетический спектр системы. Он может быть как дискретным, так и непрерывным. Стационарное состояние с дискретным спектром всегда соответствует связанному, ограниченному движению электрона в атоме. Напротив, стационарное состояние с непрерывным спектром соответствует движению электронов, потерявших связь с конкретными ядрами.

Переход квантовой системы с одного уровня энергии на другой сопровождается дискретным изменением энергии системы на величину, равную разности энергий уровней. Переход на более высокий уровень сопровождается поглощением энергии от источника возмущения, а обратные – потерей. Переход квантовой системы с потерей энергии, равной $E_m - E_n$, может происходить при испускании электромагнитного излучения с частотой

¹ См. примечание 1.

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}. \quad (1.1.2)$$

Совокупность всех излучательных переходов с верхних уровней на нижние – представляет собой спектр излучения квантовой системы. В случае безызлучательных переходов энергия перераспределяется между взаимодействующими квантовыми системами.

§ 1.2. Поведение микросистемы при нестационарном воздействии

Если микросистема оказалась во внешнем электромагнитном поле, представление об её поведении существенным образом меняется. Такую возмущённую систему по-прежнему можно описывать с помощью волновой функции Ψ^e , однако, теперь эта функция должна удовлетворять нестационарному уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^e = (\hat{H}_0 + \hat{V}) \Psi^e, \quad (1.2.1)$$

где \hat{V} – добавка к гамильтониану \hat{H}_0 , обусловленная возмущением. Возмущённой системе нельзя поставить в соответствие определённый уровень энергии, так как она пребывает в возбуждённом состоянии конечное время τ , и в соответствии с соотношением неопределённости следует считать, что $\Delta E \tau \geq \hbar$, где ΔE – разброс значений энергии.

С прекращением возмущения прежняя структура уровней восстанавливается. Если до возмущения система находилась на n -м уровне, то после воздействия электромагнитного поля она может оказаться на другом уровне, например, на уровне m .

Для нахождения вероятности квантового перехода необходимо воспользоваться принципом суперпозиции состояния. Согласно этому принципу, волновая функция Ψ_n^e возмущённого состояния может быть представлена в виде суммы невозмущённых волновых функций $\Psi_k(q, t)$:

$$\Psi_n^e(q, t) = \sum_k a_{nk}(t) \Psi_k(q, t). \quad (1.2.2)$$

Индекс волновой функции n не фиксирует какой-то определённый уровень, а обозначает, что перед возмущением система находилась в n -м невозмущённом состоянии. Функции $\Psi_k(q, t)$ являются собственными функциями уравнения (1)², если положить в нём $\hat{V} = 0$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_k = \hat{H}_0 \Psi_k. \quad (1.2.3)$$

Легко убедиться в справедливости выражения

$$\Psi_k(q, t) = \varphi_k(q) \exp(-iE_k t / \hbar). \quad (1.2.4)$$

² Везде в пособии ссылки на формулы текущего параграфа даются последними цифрами.

Физический смысл коэффициентов a_{nk} состоит в том, что вероятность перехода квантовой системы из состояния с энергией E_n в состояние с энергией E_k равна

$$W_{nk} = |a_{nk}(\tau)|^2, \quad (1.2.5)$$

где τ – длительность возмущения.

С помощью нестационарного уравнения Шредингера (1) можно получить систему уравнений для коэффициентов a_{nk} . Для этого в него подставляется (2), с учётом (4). В результате получаем

$$i\hbar \sum_k \frac{da_{nk}}{dt} \Psi_k = \sum_k a_{nk} \hat{V} \Psi_k. \quad (1.2.6)$$

Умножим левую и правую части (6) на Ψ_m^* и проинтегрируем их по пространственным координатам:

$$i\hbar \sum_k \frac{da_{nk}}{dt} \int \Psi_m^* \Psi_k dq = \sum_k a_{nk} \int \Psi_m^* \hat{V} \Psi_k dq. \quad (1.2.7)$$

Поскольку $\int \Psi_m^* \Psi_k dq = \delta_{mk}$ (δ_{mk} – символ Кронекера), то

$$i\hbar \frac{da_{nm}}{dt} = \sum_k a_{nk} \int \Psi_m^* \hat{V} \Psi_k dq. \quad (1.2.8)$$

Интеграл, стоящий в правой части (8), представим в виде

$$\int \Psi_m^* \hat{V} \Psi_k dq = \exp(i\omega_{mk}t) \langle m | \hat{V} | k \rangle, \quad (1.2.9)$$

где $\langle m | \hat{V} | k \rangle = \int \varphi_m^* \hat{V} \varphi_k dq$ – матричный элемент оператора возмущения,

$$\omega_{mk} = (E_m - E_k) / \hbar, \quad (1.2.10)$$

ω_{mk} – частота, соответствующая кванту энергии при переходе системы из m -го в k -е стационарное состояние. С учётом (9) уравнение (8) принимают вид

$$i\hbar \frac{da_{nm}}{dt} = \sum_k a_{nk} \langle m | \hat{V} | k \rangle \exp(i\omega_{mk}t). \quad (1.2.11)$$

Для всей теории, которой мы будем следовать при анализе процессов взаимодействия излучения с веществом, система уравнений (11) играет основополагающую роль. Правда, её решение в общем виде представляет довольно сложную задачу. В рамках нерелятивистской квантовомеханической теории определились два подхода к решению этой системы. Первый из них основан на использовании двухуровневой модели, справедливой при выполнении резонансного условия. Её особенности будут изложены в главе 2. Второй подход применяет аппарат теории возмущений, когда величина коэффициента a_{nm} находится методом последовательных приближений. Он освещён в главе 5³. Искать и исследовать решения уравнений (11) мы начнём, опираясь на квазиклассический подход, со случая, когда атом представим в виде простейшей двухуровневой квантовомеханической системы.

³ См. примечание П.

Глава 2. Квазиклассическая теория дипольных переходов в двухуровневой системе

§ 2.1. Резонансное приближение

Несмотря на сложный характер энергетического спектра реальных веществ, для описания взаимодействия с ними монохроматического оптического излучения часто оказывается возможным использование двухуровневой модели. При таком подходе из всего набора уровней включаются в рассмотрение только те два, энергии которых E_m и E_n удовлетворяют резонансному условию

$$\frac{E_m - E_n}{\hbar} - \omega \ll \omega, \quad \omega_{mn}, \quad (2.1.1)$$

где ω – частота световой волны. Это условие означает, что частота световой волны ω близка к частоте ω_{mn} энергетического кванта $\hbar\omega_{mn}$, равного разности энергий $E_m - E_n$. Резонансное приближение остаётся справедливым при условии незначительности возмущения полем излучения собственных частот оптического электрона. Для сохранения резонансного характера взаимодействия электрона со световой волной необходимо, чтобы напряжённость поля \mathcal{E} волны не превышала атомную E_{am} (или приближалась к ней):

$$\mathcal{E} \ll E_{am}. \quad (2.1.2)$$

Заметим, что условию (2) удовлетворяют как слабые оптические поля, практически не меняющие заселённости энергетических уровней, так и значительно более сильные поля, приводящие к весьма существенному перераспределению электронов по энергетическим состояниям.

В рамках двухуровневой модели сохраняется возможность феноменологически учесть и переходы, которые могут происходить с этих двух уровней на некоторые другие. Эти переходы бывают радиационные и столкновительные. Их характер будет определять механизм релаксации, играющий важную роль при формировании однородно уширенной линии перехода.

Для определения вероятностей оптических переходов в «двухуровневом атоме» воспользуемся двумя уравнениями из системы (1.2.11) для коэффициентов a_{nn} и a_{nm} :

$$i\hbar \frac{da_{nm}}{dt} = a_{nm} \langle n | \hat{V} | m \rangle \exp(-i\omega_{mn}t), \quad (2.1.3)$$

$$i\hbar \frac{da_{nn}}{dt} = a_{nm} \langle m | \hat{V} | n \rangle \exp(i\omega_{mn}t). \quad (2.1.4)$$

Однако извлечь с помощью этих уравнений конкретную информацию о поведении указанных коэффициентов можно лишь, определив структуру оператора \hat{V} ; поэтому рассмотрим подробнее вопрос о гамильтониане атома в световом поле.

§ 2.2. Гамильтониан атома в поле излучения

Вначале положим, что атом включает единственный электрон. В курсах электродинамики для гамильтониана электрона, движущегося в поле ядра, выводится следующее выражение:

$$H = \frac{1}{2m} (\bar{p} + e\bar{A})^2 + u - e\Phi. \quad (2.2.1)$$

Здесь e и m – соответственно абсолютная величина заряда и масса электрона, \bar{p} – его канонический импульс, равный $\bar{p} = m\bar{r}$ (\bar{r} – радиус-вектор электрона), u – эффективный потенциал ядра, Φ и \bar{A} – соответственно скалярный и векторный потенциалы внешнего электромагнитного поля. В свободной от зарядов области можно выбрать систему координат таким образом, чтобы скалярный потенциал обращался в нуль. При этом магнитная индукция \bar{B} и напряжённость электрического поля \bar{E} электромагнитной волны будут выражаться через векторный потенциал с помощью соотношений:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A}; \quad \bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}. \quad (2.2.2)$$

Из-за малых размеров атома относительно световой длины волны изменение \bar{A} в пределах атома незначительно. Поэтому удобно использовать разложение векторного потенциала \bar{A} в ряд Тейлора относительно положения ядра \bar{R} (см. рис. 2.1). Используя формулы (2), (3), выражению (1) можно придать вид

$$\bar{A}(\bar{R} + \bar{r}, t) = \bar{A}(\bar{R}, t) + (\bar{r} \nabla_k) \bar{A}(\bar{R}, t) + \dots \quad (2.2.3)$$

$$H = \frac{\bar{p}^2}{2m} + u + \bar{\mu} \bar{E}(\bar{R}, t) - \bar{m} \bar{B}(\bar{R}, t) + \frac{e}{2} \bar{r} \cdot \bar{r} \cdot \nabla_R E(\bar{R}, t) + \frac{e^2}{8m} [\bar{r} \times \bar{B}(\bar{R}, t)]^2. \quad (2.2.4)$$

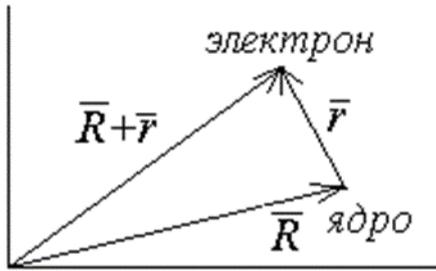


Рис. 2.1. Графическая иллюстрация к разложению вектора потенциала.

Здесь $\bar{\mu} = -e\bar{r}$ – электрический дипольный момент атома; \bar{m} – магнитный момент, связанный с механическим моментом импульса электрона $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$ соотношением $\bar{m} = -(e/2m)\bar{L}$.

В выражении (4) первые два члена определяют невозмущённый гамильтониан в отсутствие внешней световой волны. Третий и четвёртый члены характеризуют электрическое магнитное дипольные взаимодействия. Пятый член соответствует так называемому квадрупольному взаимодействию. Шестой член учитывает энергию взаимодействия, связанную с диамагнитными свойствами атома.

В принципе, привлекая дополнительные члены в разложении (3), можно учесть в гамильтониане взаимодействия ещё более высокого порядка. Однако на практике привлечение этих взаимодействий осуществляется весьма редко, поскольку их интенсивность резко падает с увеличением порядка. Ма-

ло того, в подавляющем большинстве случаев бывает достаточно ограничиться учётом электрического дипольного взаимодействия; и лишь тогда, когда он обращается в ноль, имеет смысл учитывать моменты более высокого порядка. В дальнейшем мы сосредоточим внимание, в основном, на электрическом дипольном взаимодействии. Однако метод, которому мы будем следовать, допускает обобщение и на другие случаи.

При электрическом дипольном взаимодействии полученное выше выражение для гамильтониана можно обобщить и на атом, состоящий из многих электронов. Суммируя энергии всех электронов, получаем

$$H = \frac{1}{2m} \sum_K [\bar{p}_K^2 + u(\bar{r}_K)] + \bar{\mu} \bar{E}, \quad (2.2.5)$$

где $\bar{\mu} = -e \sum_K \bar{r}_K$ – электрический дипольный момент всей системы, потенциальная энергия $u(\bar{r}_K)$ будет определяться кулоновским взаимодействием как между отдельными электронами с координатами \bar{r}_K , так и взаимодействием электронов с ядрами. Таким образом, можно считать, что невозмущённый гамильтониан (в отсутствие внешнего поля)

$$H_0 = \frac{1}{2m} \sum_K [\bar{p}_K^2 + u(\bar{r}_K)], \quad (2.2.6)$$

а гамильтониан взаимодействия

$$V = -\bar{\mu} \bar{E}. \quad (2.2.7)$$

Получив классические выражения для гамильтониана невозмущённой системы, а также гамильтониана взаимодействия, несложно построить с их помощью операторы (!) H_0 и V . Делается это, как известно, путём следующих замен:

$$\bar{r} \rightarrow \bar{r}; \quad \bar{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2.2.8)$$

Располагая теперь видом оператора Гамильтона, мы можем вернуться к вопросу о поведении вероятностных коэффициентов a_{nn} и a_{nm} .

§ 2.3. Осцилляции заселённости в резонансном поле

Пусть электрическая компонента поля световой волны

$$E(t) = \mathcal{E} \cos \omega t = \frac{1}{2} \mathcal{E} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (2.3.1)$$

дипольно взаимодействует с двухуровневой микросистемой. Для характеристики вероятностей оптических переходов воспользуемся уравнениями (2.1.3) и (2.1.4). Для простоты введём переобозначения $a_{nn} \rightarrow a_1$, $a_{nm} \rightarrow a_2$. n -й (нижний) уровень будем считать первым, m -й (верхний) – вторым. Согласно (2.2.7) оператор возмущения в поле (1) будет иметь вид

$$\hat{V} = -\frac{\mu}{2} \mathcal{E} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \quad (2.3.2)$$

Для простоты считается, что векторы $\bar{\mu}$ и $\bar{\mathcal{E}}$ параллельны.

При таком задании оператора \hat{V} получаем следующие выражения для его матричных элементов:

$$\langle m|\hat{V}|n\rangle = -\frac{1}{2}\mathcal{E}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\mu_{12}, \quad (2.3.3)$$

$$\langle n|\hat{V}|m\rangle = -\frac{1}{2}\mathcal{E}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\mu_{21}, \quad (2.3.4)$$

где

$$\mu_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^* \mu \varphi_2 dq = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2^* \mu \varphi_1 dq = \mu_{21}^* \quad (2.3.5)$$

матричные элементы оператора дипольного момента перехода⁴. С учётом (3), (4) и вновь вводимых обозначений преобразуем уравнения (2.1.3) и (2.1.4) к виду

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} = -\frac{1}{2}a_2[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)]\exp(-i\omega_{21}t)\mathcal{E}\mu_{12}, \quad (2.3.6)$$

$$i\hbar \frac{da_2}{dt} = -\frac{1}{2}a_1[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)]\exp(i\omega_{21}t)\mathcal{E}\mu_{12}. \quad (2.3.7)$$

Преобразуем указанные уравнения, опуская быстро осциллирующие члены типа $\exp(\pm 2i\omega t)$ и полагая в соответствии с резонансным условием (2.1.1) расстройку частот $\Delta = \omega_{21} - \omega \ll \omega_{21}, \omega$. Тогда

$$i\hbar \frac{da_1}{dt} = -\frac{1}{2}\mu_{12}\mathcal{E}a_2 \exp[-i(\omega_{21} - \omega)t], \quad (2.3.8)$$

$$i\hbar \frac{da_2}{dt} = -\frac{1}{2}\mu_{12}\mathcal{E}a_1 \exp[i(\omega_{21} - \omega)t]. \quad (2.3.9)$$

Введём теперь посредством соотношений

$$a_1 = \psi_1 \exp(-i\frac{\omega_{21} - \omega}{2}t), \quad a_2 = \psi_2 \exp(i\frac{\omega_{21} - \omega}{2}t) \quad (2.3.10)$$

амплитуды ψ_1 и ψ_2 меняющихся во времени коэффициентов a_1, a_2 . Рассматривая ψ_1 и ψ_2 в качестве новых неизвестных, получаем для них из (8) и (9) следующие уравнения:

$$i\hbar \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{1}{2}(\hbar\omega_{21} - \hbar\omega)\psi_1 - \frac{1}{2}\mu_{12}\mathcal{E}\psi_2, \quad (2.3.11)$$

$$i\hbar \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{1}{2}(\hbar\omega_{21} - \hbar\omega)\psi_2 - \frac{1}{2}\mu_{12}\mathcal{E}\psi_1. \quad (2.3.12)$$

Если считать, что в начальный момент времени $t=0$ (момент включения светового поля с постоянной амплитудой \mathcal{E}_0) $\psi_1=1, \psi_2=0$, то решения уравнений (11) и (12) имеют вид

⁴ Заметим, что равенство (5) выполняется лишь при определённом выборе системы координат.

$$\psi_1 = \cos \Omega t + i \frac{\omega_{21} - \omega}{2\Omega} \sin \Omega t, \quad (2.3.13)$$

$$\psi_2 = i \frac{\mu_{12} \mathcal{E}_0}{4\hbar\Omega} \sin \Omega t, \quad (2.3.14)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{2} \hbar \left[(\hbar\omega - \hbar\omega_{21})^2 + (\mu_{12} \mathcal{E}_0)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.3.15)$$

Получив явные выражения для величин ψ_1 и ψ_2 , а стало быть, и для коэффициентов a_1 , a_2 , мы теперь можем определить динамику заселённости уровней в поле световой волны. Так, вероятности обнаружить атом на первом и на втором уровнях будут соответственно равны

$$\rho_{11} = a_1 a_1^* = \psi_1 \psi_1^*, \quad (2.3.16)$$

$$\rho_{22} = a_2 a_2^* = \psi_2 \psi_2^*. \quad (2.3.17)$$

Если объёмная плотность атомов равна N , то в единице объёма на первом уровне будет находиться число атомов:

$$N_1 = N \rho_{11}, \quad (2.3.18)$$

а на втором –

$$N_2 = N \rho_{22}. \quad (2.3.19)$$

С помощью (14) и (17) найдём, что

$$\rho_{22} = \frac{\mu_{12}^2 \mathcal{E}_0^2}{8\hbar^2 \Omega^2} (1 - \cos 2\Omega t). \quad (2.3.20)$$

Из последнего выражения видно, что вероятность ρ_{22} имеет составляющую, осциллирующую с частотой 2Ω . Придавая этой частоте вид

$$\Omega = \left(\Delta^2 + \Omega_0^2 \right)^{1/2} / 2, \quad (2.3.21)$$

где Ω_0 – так называемая частота Раби, равная

$$\Omega_0 = \mu_{12} \mathcal{E}_0 / \hbar, \quad (2.3.22)$$

можно (20) переписать следующим образом:

$$\rho_{22} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0^2}{\Delta^2 + \Omega_0^2} (1 - \cos 2\Omega t). \quad (2.3.23)$$

Отсюда следует, что вероятность заселения верхнего уровня осциллирует во времени между нулём и некоторым максимальным значением, зависящим как от расстройки, так и от частоты Раби.

Если расстройка большая (или интенсивность излучения невелика), то (23) преобразуется к виду

$$\rho_{22} = \Omega_0^2 (1 - \cos \Delta t) / 2\Delta^2; \quad (2.3.24)$$

в другом крайнем случае, когда расстройка мала (высокая интенсивность излучения)

$$\rho_{22} = (1 - \cos \Omega_0 t) / 2. \quad (2.3.25)$$

Из (24) и (25) следует, что при больших расстройках осцилляции происходят на частоте расстройки, и вероятность нахождения атома на верхнем уровне никогда не достигает единицы. При малых расстройках вероятность ρ_{22} осциллирует на частоте Раби (осцилляции Раби), изменяясь в пределах от нуля до единицы.

Важно отметить, что в случае точного резонанса вероятность обнаружения атома в верхнем состоянии достигает единицы и при слабом и при сильном полях. При слабом поле, однако, атом переходит в верхнее состояние за очень длительное время (естественно, это время должно оставаться в пределах временного интервала, на котором релаксационные процессы играют незначительную роль).

Полученные выражения для вероятности ρ_{22} и комментарии к ним могут быть использованы и для анализа поведения вероятности ρ_{11} , поскольку между ними существует простая связь:

$$\rho_{11} = 1 - \rho_{22} \quad (2.3.26)$$

(двухуровневый атом может находиться лишь в двух состояниях).

Обратимся ещё раз к зависимости (23). Из неё видно, что эффективная ширина полосы, в которой монохроматическое излучение с частотой ω взаимодействует с системой, обладающей резонансной частотой ω_{21} , является функцией интенсивности световой волны. Чем больше поток излучения, тем шире полоса, в которой оно взаимодействует с системой. Спектральная зависимость вероятности заселения верхнего уровня $\Omega_0^2 / (\Delta^2 + \Omega_0^2)$ является лоренцевской, причём частота Раби играет в ней роль однородной ширины. Таким образом, в отсутствие релаксационных процессов можно говорить о динамическом полевом уширении перехода, равном $\mu_{12} \mathcal{E}_0 / \hbar$ (динамический эффект Штарка).

§ 2.4. Поляризация среды при интенсивном взаимодействии

Перейдём теперь к вопросу о поляризации вещества, наводимой переменным электромагнитным полем. Найдём сначала дипольный момент отдельного атома. Согласно постулатам квантовой механики среднее значение (или математическое ожидание) дипольного момента должно находиться из соотношения:

$$\langle \hat{\mu} \rangle = \int \Psi^6 \hat{\mu} \Psi^6 dq. \quad (2.4.1)$$

В случае двухуровневой системы её "возмущённая" волновая функция Ψ^6 должна складываться из "невозмущённых" функций Ψ_1 и Ψ_2

$$\Psi^6 = a_1 \Psi_1 + a_2 \Psi_2 \quad (2.4.2)$$

(см. формулу (1.2.2)). Учитывая выражения (1.2.4), из (1), получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mu} \rangle = & \psi_1 \psi_1^* \int \varphi_1 \hat{\mu} \varphi_1^* dq + \psi_1 \psi_2^* e^{i\omega t} \int \varphi_1 \hat{\mu} \varphi_2^* dq + \\ & + \psi_2 \psi_1^* e^{-i\omega t} \int \varphi_2 \hat{\mu} \varphi_1^* dq + \psi_2 \psi_2^* \int \varphi_2 \hat{\mu} \varphi_2^* dq \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Поскольку оператор дипольного момента $\langle \mu \rangle$ является нечётной функцией координаты, то первый и последний интегралы в правой части (3) обращаются в ноль. Воспользовавшись определением матричных элементов (2.3.5), в результате получим

$$\langle \hat{\mu} \rangle = \mu_{12}(\psi_1 \psi_2^* e^{i\omega t} + \psi_2 \psi_1^* e^{-i\omega t}). \quad (2.4.4)$$

Введём символы:

$$\rho_{12} = \psi_1 \psi_2^*, \quad (2.4.5)$$

$$\rho_{21} = \psi_2 \psi_1^*, \quad (2.4.6)$$

обладающие свойством $\rho_{12} = \rho_{21}^*$. Вместе с символами ρ_{11} и ρ_{22} (см. (2.3.16) и (2.3.17)) они формируют матрицу

$$\rho = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{vmatrix}, \quad (2.4.7)$$

весьма удобную для математического описания процессов взаимодействия. Согласно (4) её недиагональные элементы определяют величину и динамику дипольного момента атома.

Исходя из (2.3.13) и (2.3.14), можно показать, что

$$\rho_{12} = \frac{\Omega_0}{4\Omega} \left(\frac{\Delta}{\Omega} \sin^2 \Omega t - i \sin 2\Omega t \right). \quad (2.4.8)$$

Используя теперь выражения (4)–(6), получаем

$$\langle \mu \rangle = \frac{\mu_{12} \Omega_0 \Delta}{\Omega_0^2 + \Delta^2} (1 - \cos 2\Omega t) \cos \omega t + \frac{\mu_{12} \Omega_0}{(\Omega_0^2 + \Delta^2)^{1/2}} \sin 2\Omega t \sin \omega t. \quad (2.4.9)$$

Поляризация среды, т.е. сумма дипольных моментов в единице объёма равна при этом

$$P = N \langle \mu \rangle. \quad (2.4.10)$$

Из (9)–(10) видно, что поляризация среды осциллирует на частоте поля; причём она имеет две компоненты: одна из них (первое слагаемое в (9)) осциллирует в фазе с полем, другая (второе слагаемое в (9)) – сдвинута по фазе относительно колебаний поля на $\pi/2$. Когда расстройка по частотам отсутствует и $\Delta = 0$, синфазная компонента исчезает.

Наведённая световой волной поляризация оказывает на волну обратное воздействие. Вещество начинает излучать вторичные волны, интенсивность которых определяется значением второй производной поляризации по времени, которая в свою очередь в резонансе будет пропорциональна

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \sim N \mu_{12} \omega^2 \sin \Omega_0 t \sin \omega t. \quad (2.4.11)$$

Наличие в выражении (11) множителя $\sin \Omega_0 t$, медленно изменяющегося по сравнению с частотой световых колебаний, будет приводить к медленным (с частотой Раби) изменениям напряжённости результирующего поля вторичных световых волн. Такие изменения получили название световых нутаций. Отметим, что измерение частоты нутаций лежит в основе наиболее точного метода определения матричного элемента оператора дипольного момента.

§ 2.5. Импульсное воздействие

Рассмотрев процессы, возникающие при взаимодействии непрерывного поля с веществом, перейдём к анализу особенностей импульсного воздействия. Зададим напряжённость поля в виде

$$E(t) = \mathcal{E}(t) \cos \omega t \quad (2.5.1)$$

и будем считать, что амплитуда поля $\mathcal{E}(t)$ (выровнять размеры $\mathcal{E}(t)$) изменяется достаточно медленно (по сравнению с временем ω^{-1}). Для полей с изменяющейся во времени амплитудой уравнения (2.3.11) и (2.3.12), вообще говоря, не имеют аналитических решений. Исключение составляет случай точного резонанса ($\omega = \omega_{21}$). Перепишем для этого случая указанные уравнения

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{2} \psi_2, \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{2} \psi_1. \quad (2.5.2)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\psi_1 = \cos \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{2\hbar} dt, \quad \psi_2 = i \sin \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{2\hbar} dt. \quad (2.5.3)$$

С их помощью для вероятностей заселённости нижнего и верхнего уровней получаем следующие выражения:

$$\rho_{11} = \psi_1 \psi_1^* = \cos^2 \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{2\hbar} dt = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt \right), \quad (2.5.4)$$

$$\rho_{22} = \psi_2 \psi_2^* = \sin^2 \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{2\hbar} dt = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt \right). \quad (2.5.5)$$

Вычисляя недиагональный элемент матрицы (2.4.7)

$$\rho_{12} = \psi_1 \psi_2^* = -\frac{1}{2} i \sin^2 \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt, \quad (2.5.6)$$

можно согласно (2.4.4) определить поляризацию среды

$$P = N \langle \mu \rangle = N \mu_{12} \sin \omega t \sin \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt. \quad (2.5.7)$$

Из формул (4), (5), (7) видно, что все наиболее важные характеристики вещества, через которое проходит световой импульс, определяются значением переменной

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt, \quad (2.5.8)$$

получившей название площади импульса в интервале от 0 до t . Величина же

$$\theta = \int_0^\infty \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt \quad (2.5.9)$$

называется площадью под огибающей импульса или, просто, площадью импульса.

В теории взаимодействия излучения с веществом утверждение, что поведение микросистемы под действием резонансного поля определяется значением переменной $\theta(t)$, получило название теоремы площадей. Принято выделять импульсы, площади которых θ равны π (π -импульсы) и $\pi/2$ ($\pi/2$ -импульсы). Как следует из формул (4), (5), (7), при прохождении π -импульса через среду распределение заселённостей инвертируется ($\rho_{11} = 0$, $\rho_{22} = 1$), а поляризация остаётся нулевой. При прохождении же $\pi/2$ импульса заселённости уровней выравниваются, а поляризация среды оказывается максимальной.

После прекращения воздействия на среду непрерывным излучением или после прохождения через неё короткого резонансного импульса можно наблюдать затухание оптических нутаций. Затухание нутаций, как правило, обусловлено влиянием релаксационных процессов. Однако затухание возможно и при включённом световом поле. Рассмотрим этот процесс подробнее.

§ 2.6. Когерентное затухание нутаций

Предположим, что атомы, взаимодействующие со светом, не являются абсолютно идентичными. Проанализируем случай, когда отличие атомов состоит в разбросе частот переходов от некоторого среднего значения. Разброс отстроек атомов будем характеризовать функцией $f(\Delta)$. Величина $f(\Delta)d\Delta$ задаёт вероятность попадания разности $\hbar\omega_{21} - \hbar\omega$ в интервал $\hbar(\Delta + d\Delta/2)$. С помощью формул (2.3.20) и (2.3.23) найдём среднюю по ансамблю вероятность заселения верхнего уровня

$$\langle \rho_{22} \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega_0^2}{\Delta^2 + \Omega_0^2} \left\{ 1 - \cos \left[(\Delta^2 + \Omega_0^2)^{1/2} t \right] \right\} f(\Delta) d\Delta. \quad (2.6.1)$$

Если ширина распределения $f(\Delta)$ много больше $\Omega_0 = \mu_{12} \mathcal{E}_0 / \hbar$, то интеграл (1) при больших временах ($\Omega_0 t \gg 1$) сводится к следующему асимптотическому выражению:

$$\langle \rho_{22} \rangle = \frac{\pi}{2} \Omega_0 f(0) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Omega_0 \frac{\cos \Omega_0 t}{(\Omega_0 t)^{1/2}} f(0). \quad (2.6.2)$$

Из него видно, что разброс частот переходов приводит к постепенному затуханию осцилляций заселённости верхнего уровня. При больших временах вероятность заселения верхнего уровня будет стремиться к значению $\frac{\pi}{2} \Omega_0 f(0)$. Поскольку рассматриваемое затухание происходит в отсутствие каких-либо релаксационных процессов, принято говорить о когерентном затухании осцилляций Раби.

Если функция распределения имеет гауссову форму

$$f(\Delta) = \pi^{-1/2} \Delta^{-1} \exp(-\Delta^2 / \Delta_0^2). \quad (2.6.3)$$

с узкой эффективной шириной Δ_0 (много меньшей Ω_0), то несложно считать разность $\delta\rho = \rho_{11} - \rho_{22} = 1 - 2\rho_{22}$. Её среднее по ансамблю значения оказывается равным:

$$\langle \delta\rho \rangle = \left[1 + \left(\frac{\Delta_0^2}{2\Omega_0} t \right)^2 \right]^{-1/4} \cos \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\Delta_0^2}{2\Omega_0} t \right) \right] \cos \Omega_0 t. \quad (2.6.4)$$

Из последней формулы следует, что разность заселённостей испытывает постепенно затухающие осцилляции, амплитуда которых уменьшается по закону $t^{-1/2}$. Таким образом, когерентное затухание осцилляций в заселённостях имеет место, как при широкой, так и при узкой функции распределения.

Рассмотрим теперь вопрос о затухании поляризации. Сделаем это для симметричной и широкой функции распределения $f(\Delta)$. Средний дипольный момент может быть найден путём интегрирования выражения (2.4.9) по всем расстройкам от $-\infty$ до $+\infty$. Поскольку из-за симметричности функции распределения первый член (2.4.9) при интегрировании даст нулевой вклад, находим, что

$$\langle \mu \rangle = \mu_{12} \Omega_0 \sin \omega t f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \left[(\Delta^2 + \Omega_0^2)^{1/2} t \right]}{(\Delta^2 + \Omega_0^2)^{1/2}} d\Delta. \quad (2.6.5)$$

Интеграл в (5) сводится к функции Бесселя и окончательное выражение для $\langle \mu \rangle$ принимает вид

$$\langle \mu \rangle = \pi \mu_{12} \Omega_0 f(0) \mathfrak{J}_0(\Omega_0 t) \sin \omega t. \quad (2.6.6)$$

Из него следует, что средний дипольный момент (и, в целом, поляризация), испытывая колебания, постепенно затухает в соответствии с поведением функции Бесселя нулевого порядка.

Таким образом, при разбросе частот переходов когерентное затухание осцилляций в одинаковой степени свойственно как заселённостям энергетических уровней, так и наведённой световой волной поляризации. Не прибегая к строгому доказательству, укажем в заключение, что эффекты когерентного затухания будут проявляться также и при наличии разброса по значениям матричных элементов в операторе перехода.

§ 2.7. Фотонное эхо

Эффект фотонного эха является оптическим аналогом хорошо известного в радиоспектроскопии явления спинового эха. Он возникает при пропускании через среду двух импульсов излучения на частоте, соответствующей переходу между энергетическими уровнями. Для наблюдения эффекта необходим некоторый разброс частот переходов в атомах. Этот разброс мы по-прежнему будем характеризовать функцией распределения расстройок $f(\Delta)$ с шириной Δ_0 . Рассмотрим случай мощных и коротких импульсов, напряжённости полей и длительности которых удовлетворяют соотношениям

$$\mu_{12} \mathcal{E}_0 / \hbar \gg \Delta_0, \Delta_0 \ll \tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}, \quad (2.7.1)$$

где τ_1 и τ_2 — длительности соответственно первого и второго импульсов. При выполнении условий (1) взаимодействие излучения с веществом в течение времени действия импульса можно рассматривать как строго резонансное и не учитывать разброс частот переходов. Тогда, согласно (2.5.3), к моменту окончания первого импульса функции ψ_1 и ψ_2 для отдельно атома имеют вид

$$\psi_1(t = \tau_1) = \cos(\theta_1 / 2), \quad \psi_2(t = \tau_1) = i \sin(\theta_1 / 2), \quad (2.7.2)$$

где

$$\theta_1 = \theta(\tau_1) = \int_0^{\tau_1} \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt. \quad (2.7.3)$$

Пусть временной интервал между импульсами τ превосходит длительность каждого из них ($\tau \gg \tau_1, \tau_2$). Значения ψ_1 и ψ_2 в конце этого интервала могут быть найдены из (2.3.11) и (2.3.12) при $\mathcal{E} = 0$:

$$\psi_1(t = \tau + \tau_1) = \exp(i\tau\Delta/2) \cos(\theta_1 / 2), \quad (2.7.4)$$

$$\psi_2(t = \tau + \tau_1) = i \exp(-i\tau\Delta/2) \sin(\theta_1 / 2). \quad (2.7.5)$$

С помощью уравнений (2.3.11) и (2.3.12) несложно найти функции ψ_1 и ψ_2 до и после окончания второго импульса. Для этого необходимо их решать в предположении точного резонанса, считая, что (4) и (5) задают начальные условия. Результатом расчёта будут следующие выражения:

$$\psi_1(t = \tau_2 + \tau + \tau_1) = \cos(\theta_1 / 2) \cos(\theta_2 / 2) \exp(i\Delta\tau/2) - \sin(\theta_1 / 2) \sin(\theta_2 / 2) \exp(-i\tau\Delta/2), \quad (2.7.6)$$

$$\psi_2(t = \tau_2 + \tau + \tau_1) = i \sin(\theta_1 / 2) \cos(\theta_2 / 2) \exp(-i\tau\Delta/2) + i \cos(\theta_1 / 2) \sin(\theta_2 / 2) \exp(i\tau\Delta/2), \quad (2.7.7)$$

где

$$\theta_2 = \int_0^{\tau_2} \frac{\mu_{12} \mathcal{E}(t)}{\hbar} dt. \quad (2.7.8)$$

Наконец, чтобы составить полное представление о поведении атома, облучаемого двумя последовательными импульсами, определим функции ψ_1 и ψ_2 через время T после окончания второго импульса. Действуя так же, как и при получении выражений (4) и (5), находим

$$\psi_1(t = T + \tau_2 + \tau + \tau_1) = \cos(\theta_1 / 2) \cos(\theta_2 / 2) \exp[i(T + \tau)\Delta/2] - \sin(\theta_1 / 2) \sin(\theta_2 / 2) \exp[-i(T - \tau)\Delta/2], \quad (2.7.9)$$

$$\psi_2(t = T + \tau_2 + \tau + \tau_1) = i \sin(\theta_1 / 2) \cos(\theta_2 / 2) \exp[-i(T + \tau)\Delta/2] + i \cos(\theta_1 / 2) \sin(\theta_2 / 2) \exp[i(T - \tau)\Delta/2]. \quad (2.7.10)$$

С помощью последних выражений и на основании (2.4.4) может быть рассчитан дипольный момент атома. При расчёте следует иметь в виду, что члены в (9) и (10) в экспоненте которых стоит множитель $(T + \tau)$ осцилли-

руют очень быстро и после усреднения по отстройкам исчезают. В результате получаем

$$\langle \mu \rangle = -\mu_{12} \sin \theta_1 \sin^2(\theta_2 / 2) \sin[\Delta(T - \tau) + \omega t]. \quad (2.7.11)$$

Отсюда видно, что величина дипольного момента зависит как от площади импульсов θ_1 и θ_2 , так и от величины отстройки Δ . Поскольку различные атомы имеют разные отстройки, то результирующий дипольный момент, составляющий поляризацию, практически обращается в ноль. Исключение составляет случай, когда $T = \tau$. Для него характерно равенство фаз колебаний всех диполей. Именно моменту времени $T = \tau$ соответствует интенсивный всплеск излучения резонансной среды, получивший название фотонного эха⁵.

Убедиться в таком поведении поляризации можно на примере гауссового распределения расстроек, когда

$$f(\Delta) = \pi^{-\frac{1}{2}} \Delta^{-1} \exp(-\Delta^2 / \Delta_0^2). \quad (2.7.12)$$

Усреднение (11) по расстройкам в этом случае даёт

$$\langle \mu \rangle = -\mu_{12} \sin \omega t \sin \theta_1 \sin^2(\theta_2 / 2) \exp\left[-\frac{\Delta_0^2}{4}(T - \tau)^2\right]. \quad (2.7.13)$$

Складывающаяся из таких дипольных моментов поляризация будет максимальна при $T = \tau$, что обусловит появление фотонного эха. Из последнего выражения также видно, что наибольшей интенсивностью фотонное эхо будет обладать, когда первый импульс является $\pi/2$ -импульсом ($\theta_1 = \pi/2$), а второй — π -импульсом ($\theta_2 = \pi$).

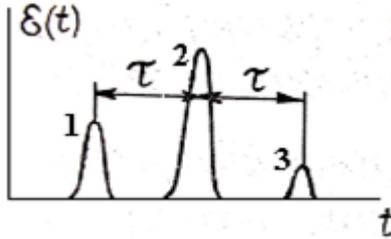


Рис. 2.2. Расположение фотонного эха относительно импульсов накачки. 1- $\pi/2$ — импульс; 2- π — импульс, 3 — эхо.

Рис 2.2 графически иллюстрирует расположение импульсов накачки и фотонного эха. Поскольку в реальных средах процессы релаксации практически не устранимы с увеличением промежутка времени τ интенсивность эха будет уменьшаться. Причём затухание эха будет хорошо описываться экспоненциальной зависимостью $\exp(-2\tau/T_2)$, где T_2 — время так называемой поперечной релаксации, физический механизм которой будет описан в следующей главе.

⁵ Фотонное эхо является следствием своеобразного "обращения" времени в рассматриваемой системе. Обращение происходит в силу инверсии заселённостей, возникающей под действием второго импульса. После прохождения этого импульса изменение параметров идёт как бы в обратном порядке.

Глава 3. Релаксационные процессы

§ 3.1. Формализм матрицы плотности. Продольная и поперечная релаксации

При получении наиболее важных соотношений в предыдущей главе использовались элементы матрицы (2.4.7), выраженные через амплитуды ψ_1 и ψ_2 коэффициентов a_1 и a_2 с помощью (2.3.16), (2.3.17), (2.4.5), (2.4.6). При этом все расчёты строились на уравнениях (2.3.11) и (2.3.12), характеризующих динамику изменения величин ψ_1 и ψ_2 .

В теории взаимодействия излучения с веществом большее распространение получил другой подход, основанный на уравнениях, описывающих непосредственно поведение элементов матрицы. Рассмотрим его подробнее.

Перепишем выражение (1.2.2) для двухуровневой системы в виде

$$\Psi^e(q, t) = a_1'(t)\varphi_1(q) + a_2'(t)\varphi_2(q), \quad (3.1.1)$$

где

$$a_1'(t) = a_1(t) \exp(-iE_1 t / \hbar), \quad (3.1.2)$$

$$a_2'(t) = a_2(t) \exp(-iE_2 t / \hbar). \quad (3.1.3)$$

Подставляя (1) в уравнение (1.2.1), получаем

$$\frac{\partial a_1'}{\partial t} \varphi_1 + \frac{\partial a_2'}{\partial t} \varphi_2 = -\frac{i}{\hbar} H(a_1' \varphi_1 + a_2' \varphi_2). \quad (3.1.4)$$

Здесь $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$. Умножим (4) на φ_1^* , и проинтегрируем по всему пространству; в результате будем иметь

$$\frac{\partial a_1'}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} (a_1' H_{11} + a_2' H_{12}), \quad (3.1.5)$$

где

$$H_{11} = \int \varphi_1^* H \varphi_1 dq, \quad H_{12} = \int \varphi_1^* H \varphi_2 dq. \quad (3.1.6)$$

Заметим, что $H_{12} = H_{21}$. Используя (5), можно осуществить переход к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (a_1' a_1'^*) &= \frac{\partial a_1'}{\partial t} a_1'^* + a_1' \frac{\partial a_1'^*}{\partial t} = \\ &= -\frac{i}{\hbar} (a_1' a_1'^* H_{11} + a_2' a_1'^* H_{12} - a_1'^* a_1' H_{11} - a_2'^* a_1' H_{21}) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Введём теперь величины

$$\rho'_{11} = a_1' a_1'^*, \quad \rho'_{22} = a_2' a_2'^*, \quad \rho'_{12} = a_1' a_2'^*, \quad \rho'_{21} = a_2' a_1'^*, \quad (3.1.8)$$

составляющие элементы матрицы

$$\rho' = \begin{vmatrix} \rho'_{11} & \rho'_{12} \\ \rho'_{21} & \rho'_{22} \end{vmatrix}, \quad (3.1.9)$$

называемой матрицей плотности.

С учётом (7), а также аналогичных ему уравнений, составленных для произведений $(a_2' a_2'^*)$, $(a_1' a_2'^*)$, $(a_2' a_1'^*)$, можно построить в компактной форме уравнение "движения" элементов матрицы плотности. Оно будет иметь вид

$$i\hbar \frac{\partial \rho'_{mn}}{\partial t} = [H, \rho']_{mn} = [H\rho' - \rho'H]_{mn}. \quad (3.1.10)$$

Уравнение (10) и лежит в основе формализма матрицы плотности. Входящий в (10) оператор энергии $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ также имеет матричное представление в соответствии с выражениями

$$H_0 = \begin{vmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} 0 & -\mu_{12}E \\ -\mu_{12}E & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.1.11)$$

С помощью соотношений (2.3.10), (2.3.16), (2.3.17), (2.4.5), (2.4.6), (2), (3) легко убедиться, что

$$\begin{aligned} \rho'_{11} &= \rho_{11}, \quad \rho'_{22} = \rho_{22}, \quad \rho'_{12} = \rho_{12} e^{i\omega_{21}t}, \\ \rho'_{21} &= \rho_{21} e^{-i\omega_{21}t}, \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Отсюда видно, что матрицы ρ и ρ' являются близкими аналогами; ρ' от ρ отличается лишь наличием экспоненциальных множителей в недиагональных элементах. Их наличие приводит к тому, что выражение (2.4.4) для среднего значения дипольного момента двухуровневого атома с использованием элементов матрицы примет вид

$$\langle \mu \rangle = \mu_{12} (\rho'_{12} + \rho'_{21}). \quad (3.1.13)$$

Поскольку в дальнейшем мы будем пользоваться лишь матрицей плотности $\hat{\rho}'$, она сама, как и все её элементы, для удобства будут обозначаться без штриха.

Уравнения движения элементов матрицы плотности (10) не учитывает влияние релаксации и по своей сути представляет собой иную форму записи уравнений (2.3.6) и (2.3.7). Для учёта релаксационных процессов оно нуждается в модификации. Наиболее просто её осуществить, добавляя к правой части уравнения (10) так называемый релаксационный член $i\hbar r_{mn}$:

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} = [H, \rho]_{mn} + i\hbar r_{mn}, \quad (3.1.14)$$

где

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{1}{T_1} (\rho_{11}^0 - \rho_{11}), \quad r_{22} = \frac{1}{T_1} (\rho_{22}^0 - \rho_{22}), \\ r_{12} &= \frac{1}{T_2} (\rho_{12}^0 - \rho_{12}), \quad r_{21} = \frac{1}{T_2} (\rho_{21}^0 - \rho_{21}). \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Входящие в (15) постоянные времени T_1 и T_2 характеризуют скорость возвращения значений элементов матрицы плотности к их равновесным значе-

ниям ρ_{mn}^0 , которые они имеют в отсутствие электромагнитной волны. Постоянные T_1 и T_2 называются временами продольной и поперечной релаксации. Указанные термины для рассматриваемых оптических процессов являются не совсем удачными. Они пришли в оптику из теории ЯМР и ЭПР, что связано с чисто формальной аналогичностью поведения двухуровневой системы и спина в магнитном поле. Поскольку элементы ρ_{11} и ρ_{22} характеризуют заселённости уровней, а ρ_{12} и ρ_{21} – средний дипольный момент, по своему физическому смыслу связанные с ними постоянные времени T_1 и T_2 определяют скорости релаксации соответственно надтеплого возбуждения и поляризации.

§ 3.2. Уравнения для поляризации, заселённостей и поля при наличии релаксации

Воспользуемся полученным в предыдущем параграфе уравнением (3.1.14) для построения системы самосогласованных уравнений определяющих поведение поляризации, заселённостей и амплитуды поля при резонансном взаимодействии. Распишем с его помощью уравнения для элементов матрицы плотности в обычной форме

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = i\omega_{21}\rho_{12} + \frac{i}{\hbar}\mu_{12}E(\rho_{22} - \rho_{11}) + \frac{1}{T_2}(\rho_{12}^0 - \rho_{12}), \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -i\omega_{21}\rho_{21} - \frac{i}{\hbar}\mu_{12}E(\rho_{22} - \rho_{11}) + \frac{1}{T_2}(\rho_{21}^0 - \rho_{21}), \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}E\mu_{12}(\rho_{12} - \rho_{21}) + \frac{1}{T_1}(\rho_{22}^0 - \rho_{22}), \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}E\mu_{12}(\rho_{12} - \rho_{21}) + \frac{1}{T_1}(\rho_{11}^0 - \rho_{11}). \quad (3.2.4)$$

Умножая все члены уравнений (1) и (2) на μ_{12} ; а затем, складывая и вычитая эти уравнения, найдём

$$\frac{\partial p}{\partial t} + i\omega_{21}\xi + \frac{1}{T_2}p = 0, \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + i\omega_{21}p + \frac{\xi}{T_2} = -\frac{2i}{\hbar}\mu_{12}^2E(\rho_{22} - \rho_{11}), \quad (3.2.6)$$

где $p \equiv \langle \mu \rangle = \mu_{12}(\rho_{12} + \rho_{21})$ – средний дипольный момент, $\xi = \mu_{12}(\rho_{21} - \rho_{12})$. При получении (5) и (6) считалось, что $\rho_{12}^0 = \rho_{21}^0 = 0$. Исключив из уравнений (5) и (6) ξ , получаем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2}\frac{\partial p}{\partial t} + (\omega_{21}^2 + \frac{1}{T_2^2})p = -\frac{2\omega_{21}\mu_{12}^2}{\hbar} \cdot E(\rho_{22} - \rho_{11}). \quad (3.2.7)$$

Вычитая из (4) (3) и используя выражения для ξ из (5), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{11} - \rho_{22}) + \frac{1}{T_1}[(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0)] = -\frac{2E}{\hbar\omega_{21}}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{P}{T_2}\right). \quad (3.2.8)$$

Умножая (7) и (8) на m , где m – число атомов в единице объёма, получим уравнения

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial P}{\partial t} + (\omega_{21}^2 + \frac{1}{T_2^2})P = \frac{2\omega_{21}\mu_{12}^2}{\hbar} E \cdot N, \quad (3.2.9)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{T_1}(N - N^0) = -\frac{2E}{\hbar\omega_{21}}\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{P}{T_2}\right). \quad (3.2.10)$$

Здесь $P = m\rho$ – поляризация, $N = N_1 - N_2 = m(\rho_{11} - \rho_{22})$ – разность заселённости энергетических уровней, N^0 – её равновесное значение. Анализ уравнений (9) и (10) обычно проводится совместно с волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_0\sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (3.2.11)$$

получаемого для бегущей вдоль оси z волны непосредственно из уравнений Максвелла. Параметр σ в нем означает проводимость среды.

Уравнения (9), (10), (11) нуждаются в уточнении. Дело в том, что на каждую молекулу или атом в плотной среде действует поле, не совпадающее, вообще говоря, с полем, входящим в уравнения Максвелла. Различие этих полей принято учитывать с помощью поправочного коэффициента Лоренца L , равного для изотропного случая

$$L = \left(\frac{n^2 + 2}{3}\right)^2, \quad (3.2.12)$$

где $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$ – показатель преломления среды без учёта рассматриваемого перехода. Перепишем уравнения (9), (10), (11), учтя это обстоятельство, а также тот факт, что в оптическом диапазоне, как правило, выполняются не-

равенства $\omega_{21} \gg \frac{1}{T_2}$, $\frac{\partial P}{\partial t} \gg \frac{P}{T_2}$:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial P}{\partial t} + \omega_{21}^2 P = \frac{2\omega_{21}\mu_{12}^2 L}{\hbar} NE, \quad (3.2.13)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{T_1}(N - N^0) = -\frac{2}{\hbar\omega_{21}} E \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (3.2.14)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_0\sigma \frac{\partial E}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (3.2.15)$$

Из уравнения (13) видно, что поляризация ведёт себя аналогично осциллятору, возбуждаемого электрическим полем с коэффициентом связи, пропорциональным разности заселённости. При отсутствии разности заселённости действие электромагнитного поля не приводит к изменению поля-

ризации. Уравнение (14) для разности заселённости отражает баланс мощности. Первый член этого уравнения определяет мощность, передаваемую микросистеме, второй – характеризует обмен мощностью микросхемы с окружающей средой; правая часть уравнения представляет собой накачку – мощность, передаваемую системе электромагнитной волной. Уравнение (15) показывает, что обратное влияние среды на поле определяется величиной $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$.

Вышеприведённые уравнения были получены для изотропной среды. Однако их можно использовать и для анизотропной среды, если поляризацию и поле считать направленными вдоль одной из главных осей. В главе IV уравнения (13), (14), (15) будут использованы для анализа таких важных явлений, как поглощение, дисперсия и насыщение.

§ 3.3. Другие способы учёта релаксации. Оптическое уравнение Блоха

Продемонстрированный в разделе 3.1 подход к учёту релаксационных процессов отнюдь не является единственным. Среди других нашедших отражение в литературе способов учёта релаксации отметим тот, который основан на введении релаксационных членов в уравнения типа (3.1.5). С релаксационным членом это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial a_1'}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} (a_1' H_{11} + a_2' H_{12}) - \frac{\gamma_1 a_1'}{2}, \quad (3.3.1)$$

где параметр γ_1 имеет смысл скорости релаксации нижнего уровня. Аналогичное уравнение может быть записано для верхнего уровня, релаксационный член в котором будет зависеть, вообще говоря, от другой скорости релаксации γ_2 . Такого рода уравнения часто используются в квазиклассической теории лазеров, в частности, в получившей широкую известность теории Лэмба [6Д].

Следует отметить ещё один классический подход к анализу процессов взаимодействия при наличии релаксации, основанный на использовании оптического уравнения Блоха. Построим формально вектор \bar{R} с компонентами

$$\begin{aligned} R_1 &= a_1' a_2'^* + a_1'^* a_2', \\ R_2 &= i(a_1' a_2'^* - a_1'^* a_2'), \\ R_3 &= a_1' a_1'^* - a_2' a_2'^*. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

и вектор \bar{A} с компонентами

$$\begin{aligned} A_1 &= (H_{12} + H_{21})/\hbar, \\ A_2 &= i(H_{12} - H_{21})/\hbar, \\ A_3 &= (E_1 - E_2)/\hbar = -\omega_{21}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Используя уравнение (3.1.5), а также аналогичное ему уравнение для коэффициента a_2' , несложно убедиться в справедливости соотношения

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = [\bar{A} \times \bar{R}], \quad (3.3.4)$$

известного, как уравнение Блоха. Модификация уравнения (4) с целью учёта релаксации состоит в приведении его к виду

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \bar{A} \times \bar{R} - \bar{R}_\perp T_2 - \bar{z}_1 (R_z - R^{(0)})/T_1. \quad (3.3.5)$$

Уравнение (5) называется оптическим уравнением Блоха. Его поясняет рис. 3.1. \bar{z}_1 – это единичный вектор, направленный, как и компонента R_z , вдоль оси z , \bar{R}_\perp – перпендикулярная направлению оси z компонента вектора \bar{R} . $R^{(0)}$ – равновесное значение компоненты R_z . T_1 и T_2 – как и ранее

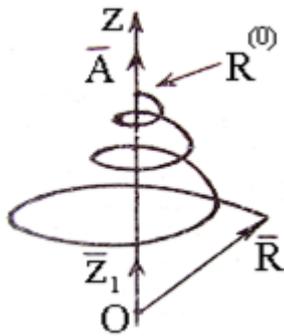


Рис.3.1. Иллюстрация к оптическому уравнению Блоха.

обозначают времена продольной и поперечной релаксации. Вектор \bar{R} прецессирует вокруг вектора \bar{A} . При выключении поля прецессия будет затухать, и величина вектора \bar{R} будет стремиться к равновесному значению $R^{(0)}$. Из уравнения (5) и поясняющего его рисунка видно, что термины "продольная" и "поперечная" релаксации в данной теоретической модели довольно наглядно иллюстрируют влияние релаксационных процессов. Оптическое уравнение Блоха, позволяющее применять для описания оптических явлений математический формализм, схожий с тем, который используется во многих разделах спектроскопии, достаточно широко используется в физической оптике и квантовой электронике.

Глава 4. Восприимчивость двухуровневой системы

§ 4.1. Поглощение и дисперсия

Фундаментальную роль в теории взаимодействия излучения с веществом играет физическая величина, называемая восприимчивостью. Она определяет связь между напряжённостью поля электромагнитной волны и поляризацией. Выражение для восприимчивости можно получить исходя из уравнений (3.2.12), (3.2.14) и (3.2.15).

Считая, что электромагнитное поле представляет собой бегущую волну

$$E = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{E}} e^{i(\omega t - kz)} + \text{К.С.}, \quad (4.1.1)$$

будем искать решение уравнения (3.2.13) в виде

$$P = \frac{1}{2} \tilde{P} e^{i(\omega t - kz)} + \text{К.С.} \quad (4.1.2)$$

Здесь тильда (\sim) обозначает комплексную амплитуду, а сокращение К.С. – комплексно-сопряжённую величину. Подставляя (2) в уравнение (3.2.13) и используя условия близости к резонансу $\omega \approx \omega_{21}$, получаем следующее выражение для амплитуды поляризации:

$$\tilde{P} = \frac{|\mu_{12}|^2 LN}{\hbar} \frac{1}{(\omega_{21} - \omega) + i(1/T_2)} \tilde{\mathcal{E}}. \quad (4.1.3)$$

В (3) разность $(N_1 - N_2 = N)$ можно считать не зависящей от времени. Это следует из уравнения (3.2.14), анализ которого показывает, что высокочастотные компоненты N малы по сравнению с постоянной составляющей, так как $\omega T_1 \gg 1$.

Определяя восприимчивость среды $\chi(\omega)$ посредством соотношения

$$\tilde{P} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \tilde{\mathcal{E}}, \quad (4.1.4)$$

с помощью (3) получаем для неё следующее выражение:

$$\chi(\omega) = \frac{\pi}{\hbar \varepsilon_0} L \mu_{12}^2 N \tilde{g}_L(\omega, \omega_{21}). \quad (4.1.5)$$

Функция

$$\begin{aligned} \tilde{g}_L(\omega, \omega_L) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{(\omega_{21} - \omega) + i(1/T_2)} = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(\omega_{21} - \omega)}{(\omega_{21} - \omega)^2 + (1/T_2)^2} - i \frac{1}{\pi} \frac{1/T_2}{(\omega_{21} - \omega)^2 + (1/T_2)^2} \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

в формуле (6) $\tilde{g}_L(\omega, \omega_{21})$ известна как комплексная функция Лоренца.

Как видно из последних уравнений, в восприимчивости можно выделить действительную и мнимую части, придав ей вид

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega), \quad (4.1.7)$$

где

$$\chi'(\omega) = \frac{\pi}{\hbar \varepsilon_0} L \mu_{12}^2 N \left[\frac{1}{\pi} \frac{(\omega_{21} - \omega)}{(\omega_{21} - \omega)^2 + (1/T_2)^2} \right], \quad (4.1.8)$$

$$\chi''(\omega) = -\frac{\pi}{\hbar \varepsilon_0} L \mu_{12}^2 N \left[\frac{1}{\pi} \frac{1/T_2}{(\omega_{21} - \omega)^2 + (1/T_2)^2} \right]. \quad (4.1.9)$$

Качественные графики действительной $\chi'(\omega)$ и мнимой $\chi''(\omega)$ частей восприимчивости приведены на рис. 4.1. Перейдём теперь к выяснению физического смысла величин $\chi'(\omega)$ и $\chi''(\omega)$. Обратимся к волновому уравнению (3.2.11). Используя представления (1), (2), (4), (5), с помощью этого уравнения можно получить для константы распространения k следующее выражение:

$$k^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} [1 + \chi(\omega)/n^2]. \quad (4.1.10)$$

Это выражение преобразуется к виду

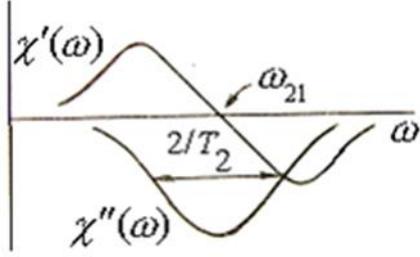


Рис. 4.1. Зависимость χ' и χ'' от частоты ω .

$$k = k' + ik'' \approx \frac{n\omega}{c} \left[1 + \frac{\chi'(\omega)}{2n^2} \right] + i \frac{\omega\chi''(\omega)}{2nc} \quad (4.1.11)$$

Откуда видно, что действительная часть k , определяющая дисперсионные свойства среды, зависит от $\chi'(\omega)$. Так как фазовая скорость волны

$$v_{\Phi} = \omega/k', \quad (4.1.12)$$

то из (11) видно, что фазовая скорость равна приблизительно c/n , с некоторой, как правило, небольшой добавкой. Эта добавка быстро изменяется вблизи частоты перехода ω_{21} и определяет область аномальной дисперсии.

Мнимая часть k , как известно, описывает поглощение в среде. Она зависит от величины $\chi''(\omega)$. Поскольку усреднённая во времени мощность электромагнитной волны

$$I = n\epsilon_0 c |\mathcal{E} e^{ikz}|^2 / 2, \quad (4.1.13)$$

то закон её изменения будет иметь вид

$$I = I_0 e^{-\kappa z}, \quad (4.1.14)$$

где коэффициент поглощения, $\kappa = -2k''$, I_0 – мощность при $z=0$. С помощью выражения (9) находим, что

$$\kappa = \frac{\omega_{21} \pi \mu_{12}^2}{\hbar \epsilon_0 c n} \text{LN} g_L(\omega, \omega_{21}). \quad (4.1.15)$$

Здесь $g_L(\omega, \omega_{21})$ – лоренцева функция формы линии, равная

$$g_L(\omega, \omega_{21}) = \frac{1}{\pi} \frac{1/T_2}{(\omega_{21} - \omega)^2 + (\Delta\omega_L/2)^2}. \quad (4.1.16)$$

Её график приведён на рис. 4.2. Ширина линии $\Delta\omega_L$ связана с временем поперечной релаксации T_2 соотношением

$$\Delta\omega_L = 2/T_2. \quad (4.1.17)$$

Как видно из (15), коэффициент κ пропорционален разности заселённостей уровней ($N_1 - N_2$). Если заселённость верхнего уровня выше ($N_2 > N_1$), то коэффициент κ становится отрицательным. Это характерно для усиливающих лазерно-активных сред.

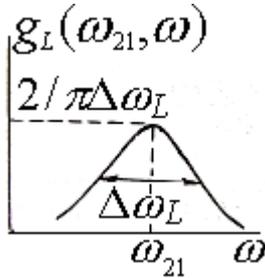


Рис. 4.2. Лоренцова форма линии.

§ 4.2. Однородное и неоднородное уширение

Проведённое в предыдущем параграфе рассмотрение относится к так называемой однородно уширенной линии, имеющей лоренцеву форму. Термин "однородное уширение" применяется в связи с тем, что взаимодействи-

ющая с излучением среда считается состоящей из абсолютно идентичных атомов. Полная макроскопическая поляризация определяется тем самым просто суммой однородного ряда вкладов от отдельных атомов, каждый из которых имеет одну и ту же частоту перехода и ширину линии. Однородно уширенная линия обусловлена релаксационными процессами, которые действуют одинаково на все атомы. Такими процессами могут быть столкновения между атомами, взаимодействие с колебаниями решётки и некоторые другие.

В тех случаях, когда из-за различия частот переходов в атомах происходит уширение линии, принято говорить о неоднородном уширении. Неоднородное уширение наблюдается в газах, так как из-за движения молекул происходит доплеровский сдвиг частот оптических переходов. Неоднородное уширение линий может иметь место и в линиях примесных ионов в силу несовершенства кристаллов и стёкол, в которых они размещены. Если изменения частот переходов в атомах имеют часто встречающееся гауссово статистическое распределение, то неоднородно уширенная линия будет иметь гауссову форму.

При неоднородном уширении отдельные атомы имеют однородно уширенные линии, которые намного уже полной ширины линий всей совокупности атомов. Группу атомов с частотами переходов, лежащих в интервале, равном ширине однородно уширенной линии $\Delta\omega$, называют однородным пакетом. Иногда по отношению к такому пакету применяют используемый в теории парамагнетизма термин "спиновый". Если вся совокупность атомов взаимодействует с электромагнитным полем. То поляризация среды находится суммированием независимых вкладов отдельных однородных пакетов. Полная же форма неоднородно уширенной линии определяется суперпозицией линий однородных пакетов. Это иллюстрирует рис. 4.3, где изображены контуры неоднородно уширенной линии и отдельного однородного пакета.

Рассмотрим на примере газовой среды вопрос о спектральной характеристике восприимчивости при неоднородном уширении линии. В газе для произвольной i -й молекулы, имеющей направленную противоположно

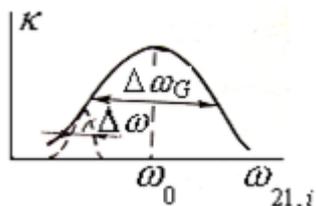


Рис. 4.3. Форма неоднородно уширенной линии. Непрерывная кривая – огибающая линии; пунктир – однородный пакет.

распространению волны компоненту скорости v_i , частота взаимодействия будет равна

$$\omega_{21,i} = \omega_0 (1 + v_i / c). \quad (4.2.1)$$

Здесь ω_0 – частота перехода, соответствующая неподвижной молекуле.

Из газовой кинетики известно, что при максвелловском распределении молекул по скоростям число молекул dM в полосе частот перехода $d\omega_{21,i}$ равно

$$dM = N_V g_G(\omega_{21,i}, \omega_0) d\omega_{21,i}, \quad (4.2.2)$$

где N_V – число молекул в единице объёма, $g_G(\omega_{21,i}, \omega_0)$ – гауссова функция формы линии равная

$$g_G(\omega_{21,i}, \omega_0) = \frac{\sqrt{(4/\pi) \ln 2}}{\Delta\omega_G} \exp\left[-4 \ln 2 \frac{(\omega_{21,i} - \omega_0)^2}{(\Delta\omega_G)^2}\right]. \quad (4.2.3)$$

Величина $\Delta\omega_G$ определяет ширину линии по уровню, соответствующего половине максимального поглощения.

Если поле E приложено к газу, то любой однородный пакет будет давать на частоте ω вклад в наводимую поляризацию, равный

$$d\tilde{P} = \varepsilon_0 \tilde{\mathcal{E}} d\chi(\omega_{21,i}, \omega). \quad (4.2.4)$$

Величину $d\chi$ можно найти, используя (4.1.5), учитывая при этом, что число молекул в пакете равно $dM = N_V g_G(\omega_{21,i}, \omega_0) d\omega_{21,i}$. Тем самым

$$d\chi(\omega, \omega_{21,i}) = \frac{\pi}{\hbar\varepsilon_0} L\mu_{12}^2 N \tilde{g}_L(\omega, \omega_{21,i}) g_G(\omega_{21,i}, \omega_0) d\omega_{21,i}. \quad (4.2.5)$$

Интегрированием (5) по всему диапазону переходов $\omega_{21,i}$ находим полную восприимчивость

$$\chi(\omega) = \frac{\pi}{\hbar\varepsilon_0} L\mu_{12}^2 N \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_L(\omega, \omega_{21,i}) g_G(\omega_{21,i}, \omega_0) d\omega_{21,i}. \quad (4.2.6)$$

Вычисление интеграла (6) упрощается, если предположить, что ширина однородного пакета значительно уже ширины гауссовой линии. Для этого случая восприимчивость становится равной

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega), \quad (4.2.7)$$

где

$$\chi''(\omega) = -\frac{\pi}{\hbar\varepsilon_0} L\mu_{12}^2 N g_G(\omega, \omega_0), \quad (4.2.8)$$

$$\chi'(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega_{21,i})}{\omega_{21,i} - \omega} d\omega_{21,i}. \quad (4.2.9)$$

Символ P перед интегралом в последнем выражении означает, что он берётся в смысле главного значения. В случае узких однородных пакетов, как видно из выражения (8), поглощение неоднородно уширенной линии определяется зависимостью, аналогичной той, которая справедлива для линии с однородным уширением (см.(8)); отличие состоит лишь в различии форм-факторов линий. Из выражения (9) следует, что дисперсия может быть определена по поглощению с помощью интеграла свёртки.

Заметим, что приведённая выше связь между действительной и мнимой частями восприимчивости имеет достаточно общий характер и может быть строго обоснована с помощью теории функций комплексного переменного. Формулы (8) и (9) являются частным случаем известных соотношений Крамерса-Кронига, согласно которым

$$\chi'(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (4.2.10)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (4.2.11)$$

Важно отметить, что эти соотношения справедливы как для однородно, так и неоднородно уширенных линий.

§ 4.3. Эффекты насыщения

Если интенсивность световой волны, взаимодействующей с веществом, достаточно велика, то энергия, передаваемая двухуровневым микросистемам, не успевает рассеиваться вследствие релаксационных процессов. Это влечёт существенное изменение заселённостей уровней, так что в поглощении и дисперсии среды начинают проявляться эффекты насыщения. Воспользуемся уравнением (3.2.14). Выделим в левой и правой частях этого уравнения члены, не зависящие от времени, и приравняем их друг другу:

$$\frac{\hbar\omega_{21}}{2} \frac{N - N_0}{T_1} = -\frac{i\omega}{4} (\tilde{P} \tilde{\mathcal{E}} * -\tilde{P} * \tilde{\mathcal{E}}). \quad (4.3.1)$$

Так как

$$\tilde{P} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \tilde{\mathcal{E}} = \varepsilon_0 (\chi'(\omega) + i\chi''(\omega)) \tilde{\mathcal{E}}, \quad (4.3.2)$$

то (1) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\hbar\omega_{21}}{2} \frac{N - N_0}{T_1} = \frac{1}{2} \omega_{21} \chi''(\omega) |\tilde{\mathcal{E}}|^2. \quad (4.3.3)$$

Используя (4.1.9), перепишем (3) в виде

$$N = \frac{N_0}{1 + I g_L(\omega, \omega_{21}) \pi / I_{нас} T_2}. \quad (4.3.4)$$

Здесь $I = n\varepsilon_0 c |\tilde{\mathcal{E}}|^2 / 2$ – плотность мощности, $I_{нас}$ – параметр насыщения, определяемый формулой

$$I_{нас} = \frac{n\varepsilon_0 c}{(2T_1 T_2 / \hbar^2) L \mu_{12}^2}. \quad (4.3.5)$$

Параметр насыщения численно равен плотности мощности, при которой разность заселённостей уменьшается вдвое. С помощью выражений (4) и (4.1.15) найдём зависимость от частоты и плотности мощности коэффициента поглощения

$$\kappa = \frac{\omega_{21} \pi L \mu_{12}^2}{\hbar \varepsilon_0 c n} N_0 \left[\frac{1/T_2}{\pi [(\omega_{21} - \omega)^2 + (1/T_2)^2 (1 + I/I_{нас})]} \right]. \quad (4.3.6)$$

Эту зависимость характеризуют графики на рис. 4.4. Важно отметить, что наряду с ростом плотности мощности происходит не только уменьшение максимального поглощения (при $\omega = \omega_{21}$), но и уширение линии. Зависимость ширины линии поглощения от плотности мощности задаётся формулой

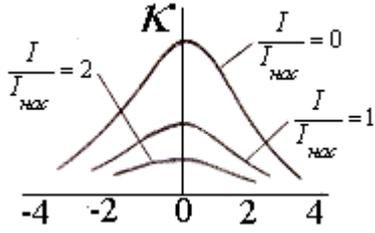


Рис. 4.4. Изменение контура поглощения с ростом мощности излучения.

$$\Delta\omega_L = \Delta\omega_{\text{ненас}} \sqrt{1 + I/I_{\text{нас}}}, \quad (4.3.7)$$

где $\Delta\omega_{\text{ненас}}$ – ширина линии при $I=0$.

Из выражения (6) следует, что поглощаемая в единице объёма мощность $\mathfrak{R} = \kappa I$ с ростом I насыщается и не превышает в резонансе уровня,

$$\mathfrak{R}_{\text{нас}} = \frac{\hbar\omega_{21}}{2} \frac{N_0}{T_1} = \kappa_{\text{ненас}} I_{\text{нас}} \quad (4.3.8)$$

$\kappa_{\text{ненас}}$ – коэффициент поглощения при $I=0$. Поскольку при $I \gg I_{\text{нас}}$ среда не может больше поглощать, то соответствующий оптический переход называют просветлённым. При просветлении любая дополнительная мощность, передаваемая волне, будет проходить через среду, не поглощаясь.

Своеобразное проявление просветления среды имеет при прохождении через неё короткого импульса с высокой напряжённостью поля. Этот эффект мы проанализируем в следующем параграфе.

§ 4.4. Солитоны

При резонансном распространении импульса монохроматического излучения длительностью много короче времён релаксации можно наблюдать явление самоиндуцированной прозрачности. Оно состоит в том, что для импульса с определённой площадью поглощение исчезает и среда становится прозрачной. Если при этом импульс, распространяясь в веществе, сохраняет свою форму, то говорят о распространении солитона.

Проанализируем особенности солитонного распространения света, исходя из волнового уравнения. Перепишем его в системе СГСЕ, считая, что проводимость среды δ равна нулю

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = \frac{4\pi}{c^2} \ddot{P}. \quad (4.4.1)$$

Поле светового импульса зададим в виде

$$E(t, z) = \mathcal{E}(t, z) \cos(\omega t - kz). \quad (4.4.2)$$

Огибающую импульса $\mathcal{E}(t, z)$ будем считать медленно изменяющейся как по времени, так и по координате z . Условие медленности огибающей сводится к двум соотношениям

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right| \ll \omega |\mathcal{E}|, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \ll \left(\frac{\mathcal{E}}{\lambda} \right). \quad (4.4.3)$$

С использованием (3) уравнение (1) может быть преобразовано к виду

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{E}(z, t) = -2\pi \frac{\omega}{c} N \mu_{12} \sin \theta(z, t), \quad (4.4.4)$$

где в отличие от (2.5.8)

$$\theta(z, t) = \frac{\mu_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(z, t) dt. \quad (4.4.5)$$

Будем искать решение уравнения (4), считая, что

$$\theta(z, t) = \theta(z - vt), \quad (4.4.6)$$

$$\mathcal{E}(z, t) = \mathcal{E}(z - vt) = \frac{\hbar}{\mu_{12}} \frac{\partial \theta(z - vt)}{dt}. \quad (4.4.7)$$

Произведём замену переменных

$$\varphi = z - vt, \quad (4.4.8)$$

с учётом которой (7) примет вид

$$\mathcal{E}(z, t) = -g \frac{\hbar}{\mu_{12}} \frac{\partial}{d\varphi} \theta(\varphi). \quad (4.4.9)$$

Подставляя (9) в (4), получаем

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} = \frac{2\pi N \omega \mu_{12}^2}{v(c - v)\hbar} \sin \theta. \quad (4.4.10)$$

Последнее уравнение аналогично уравнению физического маятника (параметр θ – аналог угла отклонения от положения равновесия). Если положить квадрат "частоты" колебаний f^2 равным

$$f^2 = \frac{2\pi N \omega \mu_{12}^2}{v(c - v)\hbar}, \quad (4.4.11)$$

то (10) можно записать в форме

$$\theta''_{\varphi\varphi} = f^2 \sin \theta. \quad (4.4.12)$$

Уравнение (12) является частным случаем известного в теории колебаний синус-уравнения Гордона. Его решение имеет вид

$$\theta = 4 \arctg e^{\lambda \varphi}. \quad (4.4.13)$$

После дифференцирования получаем:

$$\theta' = 4\lambda e^{\lambda \varphi} / (1 + e^{2\lambda \varphi}), \quad (4.4.14)$$

$$\theta''_{\varphi\varphi} = \lambda^2 \sin(4 \arctg e^{\lambda \varphi}). \quad (4.4.15)$$

Последнее выражение с учётом (13) удовлетворяет уравнению (12) при $\lambda = f$. Сопоставляя (9) и (14), легко установить, что

$$\mathcal{E}(\varphi) = 8fv \frac{\hbar}{\mu_{12}} \operatorname{sch}(\varphi). \quad (4.4.16)$$

Как видно из (16), секанс-гиперболическая огибающая импульса, удовлетворяющего автомодельному представлению (6), имеет симметричную колоколообразную форму. Используя (8) и (11), перепишем (16) в виде

$$\mathcal{E}(z - vt) = 8 \sqrt{\frac{2\pi v N \hbar \omega}{c - v}} \operatorname{sch} \left[\frac{\mu_{12}}{\hbar} (z - vt) \sqrt{\frac{2\pi N \hbar \omega}{v(c - v)}} \right]. \quad (4.4.17)$$

Заметим, что (17) описывает 2π -импульс, так как $\theta(+\infty) - \theta(-\infty) = 2\pi$. Таким образом, 2π -импульс, описываемый выражением (17), может распро-

страняться в среде без затухания и изменения формы. При этом среда после прохождения импульса остаётся в основном состоянии. Импульсы, обладающие такими свойствами, принято называть солитонами, а само явление их распространения называют эффектом самоиндуцированной прозрачности.

При распространении солитона в среде под действием его переднего фронта атомы переходят из нижнего состояния в верхнее. Затем под действием хвостовой части солитона атомы когерентно излучают, передавая энергию полю. Поскольку площадь импульса равна 2π , поглощение и переизлучение оказываются строго сбалансированы. Если площадь импульса равна $2\pi t$ (t – целое положительное число), то такой импульс не может распространяться в среде, сохраняя форму. По мере распространения в среде он разобьётся на t солитонов, площадь каждого из которых будет равна 2π .

Экспериментально эффект самоиндуцированной прозрачности легко наблюдается в большом числе молекулярных газов (SF_6 , BCl_2 и т.п.), имеющих линии поглощения на длинах волн генераций CO_2 -лазера.

§ 4.5. Насыщение усиления в системе вырожденных уровней

В ходе выше проведённого анализа предполагалось, что энергетические уровни рассматриваемой двухуровневой системы являются невырожденными. Рассмотрим, как повлияет на характер полученных зависимостей наличие вырождения. Будем считать, что имеется g_1 собственных состояний атома с энергией E_1 и g_2 собственных состояний с энергией E_2 (рис. 4.5). Модель вырожденных состояний включает в себя и случай, когда уровни отдельных состояний не точно вырождены, а отстоят друг от друга на расстояние, малое по сравнению с шириной полосы возбуждающего излучения и по сравнению с величиной kT (k – постоянная Больцмана). По существу, такие системы уровней формируют энергетические зоны. Это позволяет распространить весь ниже следующий анализ и на процессы взаимодействия излучения. При малом расстоянии между уровнями в зоне действующие в реальных системах быстрые кросс-релаксационные процессы между вырожденными состояниями выравнивают заселённости уровней. Благодаря этому,

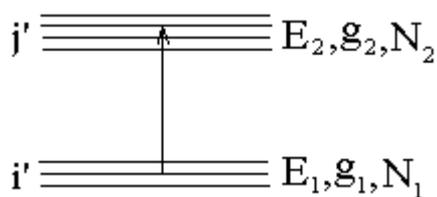


Рис. 4.5. Двухуровневая система с вырожденными верхним и нижним уровнями.

независимо от того, какие состояния участвуют в переходах, внутренние релаксационные процессы поддерживают распределение $N_i = N_1 / g_1$ и $N_j = N_2 / g_2$, где N_i и N_j – заселённости уровней, участвующих в поглощении светового кванта, N_1 и N_2 – полное число атомов или молекул в единице объёма соответственно на нижних и верхних уровнях.

Построим вначале уравнения, характеризующие изменения N_1 и N_2 , для невырожденного случая. Учитывая, что $N_1 + N_2 = N_V$, где N_V – постоянная величина, из (3.2.14) можно получить следующие уравнения:

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + \frac{N_1 - N_1^0}{T_1} = \frac{1}{\hbar\omega_{21}} \dot{\bar{P}}\bar{E}, \quad (4.5.1)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} + \frac{N_2 - N_2^0}{T_1} = \frac{1}{\hbar\omega_{21}} \dot{\bar{P}}\bar{E}. \quad (4.5.2)$$

В вырожденном случае вид уравнения (1) изменится:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{N_i - N_i^0}{T_1} = -\frac{1}{\hbar\omega_{21}} \frac{1}{g_1} \sum_{i=1}^{g_1} \sum_{j=1}^{g_2} \dot{\bar{P}}_{ij}\bar{E} = -\frac{1}{\hbar\omega_{21}} \frac{1}{g_1} \dot{\bar{P}}\bar{E}. \quad (4.5.3)$$

Структура правой части уравнения (3) обусловлена тем, что при наличии кросс-релаксации заселённость состояния i изменяется в результате всех переходов между уровнями 1 и 2; фактически это изменение равно $1/g_1$, части полного изменения заселённости уровня 1. Распространяя подобные рассуждения на уровень j , после подстановки $N_i = N_1/g_1$ и $N_j = N_2/g_2$ будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{N_1}{g_1} + \frac{N_1/g_1 - N_1^0/g_1}{T_1} = -\frac{1}{\hbar\omega_{21}} \frac{1}{g_1} \dot{\bar{P}}\bar{E}, \quad (4.5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{N_2}{g_2} + \frac{N_2/g_2 - N_2^0/g_2}{T_1} = -\frac{1}{\hbar\omega_{21}} \frac{1}{g_2} \dot{\bar{P}}\bar{E}. \quad (4.5.5)$$

Вычитая из (4) уравнение (5), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N_1}{g_1} - \frac{N_2}{g_2} \right) + \frac{(N_1/g_1 - N_2/g_2) - (N_1^0/g_1 - N_2^0/g_2)^0}{T_1} = -\frac{1}{\hbar\omega_{21}} \left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} \right) \dot{\bar{P}}\bar{E}. \quad (4.5.6)$$

Этим уравнением следует пользоваться вместо уравнения (3.2.14) в тех случаях, когда имеет место вырождение уровней.

Если исходить из уравнения (6), то выражение (4.3.4), определяющее разность заселённостей при наличии насыщающего поля, примет вид

$$N_1/g_1 - N_2/g_2 = \frac{(N_1/g_1 - N_2/g_2)^0}{1 + \frac{I}{I'_{нас}} \frac{g_L(\omega, \omega_{21})}{T_2/\pi}}. \quad (4.5.7)$$

Входящий в (7) параметр насыщения $I'_{нас}$ связан с аналогичным параметром, задаваемым (4.3.5), соотношением

$$I'_{нас} = \frac{2I_{нас}}{\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} \right)}. \quad (4.5.8)$$

В тех случаях, когда между подуровнями в зонах отсутствуют кросс-релаксационные процессы, анализ процессов взаимодействия световой волны с системой зона-зона следует проводить, используя подход, основанный

на применении уравнений (2.3.11), (2.3.12). Записывая эти уравнения для каждого подуровня нижней и верхней зон, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\psi}_n &= \hbar\Delta_n\psi_n + \sum_k \frac{\mu_{nk}\varepsilon_0\psi_k}{2}, \\ i\hbar\dot{\psi}_k &= \hbar\Delta_k\psi_k + \sum_n \frac{\mu_{kn}\varepsilon_0\psi_n}{2}. \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Индекс n относится к нижнему подуровню, индекс k – к верхнему. Несмотря на сложность системы (9), в настоящее время на основе так называемой диаграммной техники разработаны эффективные методы её решения. Используя их, можно определить величины ψ_n и ψ_k , а затем и заселённости соответствующих подуровней. Суммируя эти заселённости, несложно определить и заселённости зон. Поскольку получающиеся выражения для заселённостей зон весьма сложны, мы ограничимся приведением выражения для разности заселённостей зон, сформированных вырожденными состояниями. Для случая, когда каждая зона состоит из g подуровней справедливо выражение

$$N_1 - N_2 = \frac{\Im_1\left(2\frac{\mu E_0}{\hbar}g^{1/2}t\right)}{\frac{\mu E_0}{\hbar}g^{1/2}t}. \quad (4.5.10)$$

Из него следует, что при $t \rightarrow \infty$ ($N_1 - N_2$) $\rightarrow 0$. Этот результат справедлив для системы с релаксацией, когда $I \rightarrow \infty$ (см. (4.5.7)).

§ 4.6. Нелинейная поляризация среды и нелинейные оптические явления

С увеличением интенсивности связь между напряжённостью электрического поля световой волны и поляризацией среды распространения перестаёт быть линейной и может быть представлена в виде

$$P = \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots, \quad (4.6.1)$$

где величина $\chi^{(1)} = \varepsilon_0\chi$ характеризует линейную восприимчивость, величины $\chi^{(2)}$, $\chi^{(3)}$ и т. д. – нелинейные восприимчивости второго, третьего и т.д. порядков.

Предположим, что на среду падает волна $E = E_0 \cos(\omega t - k_1 z)$, где $k_1 = (\omega/c)n$ – волновое число. Тогда будет справедливым выражение

$$P = \chi^{(1)}E_0 \cos(\omega t - k_1 z) + \chi^{(2)}E_0^2 \cos^2(\omega t - k_1 z) + \chi^{(3)}E_0^3 \cos^3(\omega t - k_1 z) + \dots \quad (4.6.2)$$

Первый член в правой части выражения (2) характеризует обычное переизлучение падающей волны на частоте ω . Физический смысл второго члена становится понятным, если его записать в виде

$$P_{n/l} = \chi^{(2)}E_0^2 \cos^2(\omega t - k_1 z) = \frac{1}{2}\chi^{(2)}E_0^2 + \frac{1}{2}\chi^{(2)}E_0^2 \cos(2\omega t - 2k_1 z). \quad (4.6.3)$$

Как следует из (3), выражение для рассматриваемой части поляризации состоит из двух слагаемых – постоянного и меняющегося с удвоенной частотой. Наличие первого слагаемого указывает на процесс выпрямления (детектирования) высокочастотного электромагнитного поля световой вол-

ны. Второе слагаемое относится к процессу генерации второй гармоники падающего излучения.

Третий член в (2) может быть преобразован следующим образом:

$$P^{(3)} = \chi^{(3)} E_0^3 \cos^3(\omega t - k_1 z) = \frac{3}{4} \chi^{(3)} E_0^2 E_0 \cos(\omega t - k_1 z) + \frac{\chi^{(3)} E_0^2}{4} E_0 \cos 3(\omega t - k_1 z). \quad (4.6.4)$$

Последнее слагаемое в (4) указывает на присутствие в преобразованном излучении третьей гармоники. Первое же слагаемое определяет нелинейность показателя преломления среды распространения. Убедиться в этом можно, объединив это слагаемое с первым слагаемым в (2). Это даёт возможность определить поляризацию среды P и её показатель преломления n для частоты ω

$$P = \varepsilon_0 \chi E + \chi^{(3)} E^3. \quad (4.6.5)$$

Используя известную связь между электрической индукцией D и поляризацией P

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 E + P = \left[\varepsilon_0 (1 + \chi) + \frac{3}{4} \chi^{(3)} E^2 \right] E, \quad (4.6.6)$$

можно найти диэлектрическую проницаемость ε

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi) + \frac{3}{4} \chi^{(3)} E^2 \quad (4.6.7)$$

и соответствующий показатель преломления n

$$n = \sqrt{\varepsilon / \varepsilon_0} = \sqrt{1 + \chi + \frac{3}{4} \chi^{(3)} E^2 / \varepsilon_0} \approx \sqrt{1 + \chi} \left(1 + \frac{\frac{3}{4} \chi^{(3)} E^2}{2 \varepsilon_0 (1 + \chi)} \right). \quad (4.6.8)$$

При последнем преобразовании учтено, что нелинейная поправка к показателю преломления много меньше единицы. Усредняя квадрат напряжённости поля по периоду колебаний, (8) можно привести к виду

$$n = n_0 + n_2 E_0^2. \quad (4.6.9)$$

Здесь n_0 определяет линейный показатель преломления; $n_2 E_0^2$ описывает нелинейную поправку к показателю преломления.

Зависимость показателя преломления среды от интенсивности светового пучка приводит к эффектам самовоздействия излучения. Так, если распределение интенсивности в пучке описывается гауссовой функцией (такое распределение характерно для лазерных пучков), то можно наблюдать явления самофокусировки и дефокусировки пучка. Это связано с тем, что знак поправки в (9) может быть как положительным, так и отрицательным. Если нелинейная поправка положительна, то скорость движения периферийных участков пучка больше, чем центральных. В результате изначально плоский волновой фронт становится вогнутым в сторону распространения пучка и происходит его фокусировка. Если нелинейная поправка отрицательна, то участки вблизи оси двигаются быстрее и волновой фронт становится выпуклым. Это приводит к дефокусировке пучка. При определённых поперечных размерах пучка и его мощности процессы самофокусировки пучка и его де-

фокусировки могут уравновесить друг друга. Тогда будет наблюдаться самоканалирование пучка, при котором сечение пучка остаётся неизменным. Описанные процессы самовоздействия излучения можно наблюдать в газах, жидкостях и твёрдых телах.

Глава 5. Анализ квантовых переходов в различных порядках теории возмущений

Выше проведённое рассмотрение оптических переходов в атомных системах осуществлялось преимущественно в рамках двухуровневой модели с использованием резонансного приближения. В настоящей главе квантовые переходы в атомах будут рассмотрены в более общем виде без использования указанных допущений.

§ 5.1. Определение вероятности перехода методом последовательных приближений

Вернёмся к теории нестационарных возмущений, элементы которой изложены в параграфе 1.2. Будем считать воздействующее на вещество поле слабым, а его частоту заметно отличающейся от частоты оптического перехода. Отказ от двухуровневой модели требует возврата к анализу системы уравнений (1.2.11). Она является точной, поскольку полностью эквивалентна исходному уравнению (1.2.1). Однако решение этой системы представляет собой весьма сложную задачу. Мы воспользуемся тем, что воздействие на атомную систему является слабым. Если при $t \leq 0$, система находилась в состоянии Ψ_n , то все коэффициенты a_{nk} были равны нулю, кроме коэффициента

$$a_{nn}(0) = \delta_{kn}. \quad (5.1.1)$$

Будем считать, что при $t > 0$ (с момента включения поля) из-за слабости воздействия возмущённая функция системы Ψ_n^e мало отличается от Ψ_n и очень медленно меняется с течением времени. Это позволяет представить коэффициенты a_{nk} в виде

$$a_{nk} = a_{nk}^{(0)}(t) + a_{nk}^{(1)}(t) + a_{nk}^{(2)}(t) + \dots, \quad (5.1.2)$$

где

$$a_{nk}^{(0)}(t) = a_{nn}(0) = \delta_{kn}.$$

Коэффициент $a_{nk}^{(1)}$ имеет тот же порядок малости, что и возмущение; порядок малости коэффициента $a_{nk}^{(2)}(t)$ определяется квадратом возмущения и т.д. Подставляя (2) в (1.2.11), получаем

$$i\hbar \frac{da_{nm}^{(1)}}{dt} = \sum_k \langle m | \hat{V} | k \rangle e^{i\omega_{mk}t} a_{nk}^{(0)} = \langle m | \hat{V} | n \rangle e^{i\omega_{mn}t}. \quad (5.1.3)$$

(выражение (3) получено в пренебрежении членами второго и более высокого порядка малости по возмущению). Интегрируя (3), имеем:

$$a_{nm}^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \langle m | \hat{V} | n \rangle e^{i\omega_{mn}t} dt. \quad (5.1.4)$$

Аналогичным образом могут быть найдены и поправки более высокого порядка малости. Так,

$$a_{nm}^{(2)}(\tau) = \frac{1}{i\hbar} \sum_k \int_0^\tau \langle m | \hat{V} | k \rangle e^{i\omega_{mk}t} a_{nk}^{(1)} dt. \quad (5.1.5)$$

Учитывая коэффициенты разложения в (1.2.2) с добавками все более высокого порядка малости, можно с любой степенью точности определить волновую функцию Ψ_n^e . Одновременно с заданной точностью можно определить и отнесённую к единице времени вероятность перехода из состояния n в состояние m

$$\omega_{nm} = \frac{1}{\tau \hbar^2} \left| \sum_k \int_0^\tau (a_{nk}^{(1)} + a_{nk}^{(2)} + a_{nk}^{(3)} + \dots) \langle m | \hat{V} | k \rangle \times \exp(i\omega_{nk}t) dt \right|^2. \quad (5.1.6)$$

§ 5.2. Переходы в «размытые» состояния в первом порядке теории возмущений

Гармоничное возмущение, обусловленное световой волной, может быть представлено в виде

$$\hat{V}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \hat{h}(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}), & t > 0 \end{cases}. \quad (5.2.1)$$

где \hat{h} – независимый от времени оператор. Определим отнесённую к единице времени вероятность перехода из состояния n в состояние m в первом порядке теории возмущений

$$\begin{aligned} \omega_{nm}^{(1)} &= \frac{|a_{nm}^{(1)}(\tau)|^2}{\tau} = \frac{1}{\tau \hbar^2} \left| \int_0^\tau \langle m | \hat{V}(t) | n \rangle e^{i\omega_{mn}t} dt \right|^2 = \\ &= \frac{1}{\tau \hbar^2} |\langle m | \hat{h} | n \rangle|^2 \left| \frac{\exp[i(\omega_{mn}-\omega)\tau]-1}{\omega_{mn}-\omega} + \frac{\exp[i(\omega_{mn}+\omega)\tau]-1}{\omega_{mn}+\omega} \right|^2. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Первое слагаемое в (2) относится к переходу системы на более высокие уровни и соответствует поглощению, второе – переходу на более низкие и соответствует излучению.

Если ограничиться лишь процессами поглощения, (2) преобразуется к виду

$$\omega_{nm}^{(1)} = \frac{\pi}{\hbar^2} \left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|^2 f(\alpha, \tau), \quad (5.2.3)$$

где

$$f(\alpha, \tau) = \sin^2(\alpha, \tau) / \pi \alpha^2 \tau, \quad \alpha = (\omega_{mn} - \omega) / 2. \quad (5.2.4)$$

График функции $f(\alpha, \tau)$ приведён на рис. 5.1. В резонансном случае, когда $\omega = (E_m - E_n) / \hbar$ и конечное состояние является дискретным, т.е. характеризуется определённой энергией E_m , $\alpha=0$ и $f(\alpha, \tau)=\tau/\pi$. С учётом этого

$$\omega_{nm}^{(1)} = (\tau / \hbar^2) \left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|^2. \quad (5.2.5)$$

Видно, что с увеличением τ вероятность перехода может неограниченно возрастать. Тем самым резонансное взаимодействие не может изучаться в рамках рассматриваемого метода последовательных приближений, который требует достаточной малости величины $|a_{nm}^{(1)}|^2$. Однако этот метод оказывается весьма эффективным, когда вместо одиночного конечного состояния мы имеем "размытый" спектр или систему близко отстоящих уровней. В этом случае следует рассматривать переход не на уровень m , а в некоторый интервал Δm конечных состояний $n \rightarrow (m \div m + \Delta m)$. Применимость метода последовательных приближений обусловлена тем, что требованию малости теперь

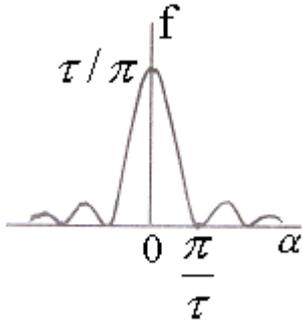


Рис. 5.1. График функции $f(\alpha, \tau)$.

должна удовлетворять не величина $|a_{nm}^{(1)}|^2$, а интеграл

$$\int_{\Delta m} |a_{nm}^{(1)}|^2 dm.$$

Найдём выражение для вероятности перехода в размытое верхнее состояние. Воспользуемся тем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\alpha, \tau) = \delta(\alpha). \quad (5.2.6)$$

где $\delta(\alpha)$ – дельта-функция. Подставляя (6) в (3), получаем вероятность перехода в состояние с определённой энергией E_m

$$\tilde{\omega}_{nm}^{(1)} = \frac{\pi}{\hbar^2} \left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|^2 \delta(\alpha) = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|^2 \delta(E_m - E_n - \hbar\omega). \quad (5.2.7)$$

При размытом верхнем состоянии целесообразно ввести функцию плотности конечных состояний $\varphi(E)$, обладающую тем свойством, что $\varphi(E)dE$ будет означать число состояний системы в интервале значений от E до $E+dE$. Вероятность перехода из состояния E_m в одно из состояний в интервале энергий от E_m до E_m+dE_m будет равна

$$d\omega_{nm}^{(1)} = \tilde{\omega}_{nm}^{(1)} \varphi(E_m) dE_m = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|^2 \delta(E_m - E_n - \hbar\omega) \varphi(E_m) dE_m. \quad (5.2.8)$$

Проинтегрировав последнее выражение по E_m , находим полную вероятность перехода

$$\omega_{nm}^{(1)} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle m | \hat{h} | n \rangle \right|^2 \varphi(E_n + \hbar\omega). \quad (5.2.9)$$

В случае перехода в размытое состояние функция $\varphi(E)$ по существу будет описывать форму спектральной линии.

Используя рассуждения, аналогичные вышеприведённым, можно установить, что выражение (9) будет справедливо и для процессов излучения.

§ 5.3. Переходы через виртуальные состояния

Весьма часто случается, что матричный элемент $\left\langle m|\hat{h}|n \right\rangle$ оператора возмущения оказывается равным нулю, обращается в ноль тем самым и вероятность перехода, рассчитанная в первом порядке теории возмущений. Однако значение вероятности, полученное с использованием следующих приближений, может оказаться отличным от нуля.

Рассмотрим вероятность перехода во втором приближении теории возмущений. Воспользуемся формулой (5.1.5). Присутствующая в ней сумма берётся по промежуточным состояниям. Важно отметить, что процесс перехода через промежуточные состояния в теории возмущений не следует рассматривать как реальный процесс. Промежуточные состояния носят виртуальный характер и вводятся, прежде всего, для удобства трактовки получаемых выражений. Следует отметить, что при переходах в виртуальные состояния энергия системы не обязательно должна сохраняться. Мало того, виртуальный уровень может располагаться в области запрещённых значений энергии микросистемы. При этом никакие измерения не позволяют обнаружить систему на том или ином виртуальном уровне.

Сказанное не означает, что переход с уровня n на уровень m не может происходить через реальное энергетическое состояние, например, через состояние l . Однако в этом случае анализ перехода должен свестись к последовательному применению аппарата теории возмущений сначала к переходу $n \rightarrow l$, а затем к переходу $l \rightarrow m$.

Рассматривая во втором приближении переход $n \rightarrow m$ через виртуальные состояния, можно с помощью формулы (5.1.5) получить следующее выражение для вероятности перехода, отнесённой к единице времени:

$$\omega_{nm}^{(2)} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \sum_k \frac{\langle m|\hat{h}|k \rangle \langle k|\hat{h}|n \rangle}{E_n - E_k} \right|^2 \varphi(E_m). \quad (5.3.1)$$

Поскольку все слагаемые, входящие в сумму выражения (1), имеют в знаменателе разность $E_n - E_k$, то можно сделать вывод, что определяющий вклад в величину $\omega_{nm}^{(2)}$ вносят переходы через близлежащие к уровню n виртуальные уровни. Из сравнения формул (5.2.9) и (1), видна аналогия в их структуре. Исходя из неё, можно при переходе от выражения для $\omega_{nm}^{(1)}$ к выражению для $\omega_{nm}^{(2)}$ в (5.2.9) формально заменить матричный элемент $\langle m|\hat{h}|n \rangle$ на матричный элемент Λ_{mn} , равный

$$\Lambda_{mn} = \sum_k \frac{\langle m|\hat{h}|k \rangle \langle k|\hat{h}|n \rangle}{E_n - E_k}. \quad (5.3.2)$$

Глава 6. Описание процессов взаимодействия излучения с веществом в случае, когда среда и поле квантуются

§ 6.1. Метод вторичного квантования

Изложенный в главе II подход к анализу процессов взаимодействия излучения с веществом можно сделать более последовательным, если осуществить квантование не только энергии атомов, но и энергии светового поля. Однако описанный выше способ квантования энергии электрона в атоме, при котором аргументами волновой функции являются координаты частицы, не может быть использован при квантовании поля излучения. Дело в том, что при взаимодействии света с веществом фотоны испускаются и поглощаются, поэтому проследить за поведением во времени какого-либо одного фотона не представляется возможным. При квантовании электромагнитного поля используется другой метод, получивший название метода вторичного квантования. Он основан на регистрации изменения во времени числа фотонов в том или ином конкретном состоянии. При этом аргументами волновой функции служат числа заполнения фотонами конкретных состояний.

Рассмотрим область пространства, имеющую форму куба со стороной L . Будем считать, что три ребра куба направлены по осям x , y , z . Пусть через эту область распространяется световая волна, волновой вектор которой $\vec{k} = \vec{i}k_x + \vec{j}k_y + \vec{k}k_z$. Потребуем, чтобы электрическое и магнитное поля удовлетворяли периодическим условиям на противоположных гранях куба:

$$\exp\{i[k_x x + k_y y + k_z z]\} = \exp\{i[k_x (x + L) + k_y (y + L) + k_z (z + L)]\}. \quad (6.1.1)$$

Эти условия предполагают, что перенос на расстояние L параллельно тому или иному ребру куба не меняет экспоненциального решения волнового уравнения. Из (1) вытекают следующие соотношения:

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad (6.1.2)$$

где n_x , n_y , n_z — целые числа, изменяющиеся в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Последние соотношения показывают, что постоянные распространения составляют дискретную совокупность значений.

Рассмотрим пространство волновых векторов (k -пространство), в котором по осям ординат откладываются значения k_x , k_y , k_z . В силу их дискретности все пространство оказывается разбитым на отдельные ячейки "объемом"

$$\Delta_0 = 8\pi^3 / L^3 = 8\pi^3 / V. \quad (6.1.3)$$

Каждой такой ячейке можно поставить в соответствие две монохроматические волны, различающиеся поляризацией. Найдём число волн, приходящееся на интервал частот от ω до $\omega + d\omega$. Вводя функцию $g(\omega)$ распределения, это число можно определить произведением $g(\omega)d\omega$. Так как $\omega = ck$, то интервалу частот $d\omega$ в k -пространстве будет соответствовать шаровой слой радиуса $k = \omega/c$ и толщиной $dk = d\omega/c$. Его объем равен $4\pi k^2 dk = 4\pi \omega^2 d\omega / c^3$. Если этот объем поделить на Δ_0 и умножить на два (с тем, чтобы учесть две поляризации), можно установить, что

$$g(\omega)d\omega = V\omega^2 d\omega / \pi^2 c^3. \quad (6.1.4)$$

Тот факт, что в k -пространстве поле волны описывается дискретным набором величин, позволяет разложить векторный потенциал по дискретному набору плоских монохроматических волн:

$$\bar{A} = \sum_k \left\{ \bar{A}_{\bar{k}}(t) \exp(i\bar{k}\bar{r}) + \bar{A}_{\bar{k}}^*(t) \exp(-i\bar{k}\bar{r}) \right\}, \quad A_k \sim e^{i\omega t}. \quad (6.1.5)$$

Используя связь (2.2.2), а также учитывая, что энергия W поля волны в объёме V

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_V E^2(r,t) dV, \quad (6.1.6)$$

можно для W получить следующее выражение:

$$W = \sum_k (\bar{P}_{\bar{k}}^2 + \omega^2 \bar{Q}_{\bar{k}}^2) / 2. \quad (6.1.7)$$

Здесь

$$\bar{Q}_{\bar{k}} = \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (\bar{A}_{\bar{k}} + \bar{A}_{\bar{k}}^*), \quad (6.1.8)$$

$$\bar{P}_{\bar{k}} = \frac{d}{dt} \bar{Q}_{\bar{k}} = -i\omega \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (\bar{A}_{\bar{k}} - \bar{A}_{\bar{k}}^*). \quad (6.1.9)$$

В механике Гамильтона "канонические переменные" $\bar{Q}_{\bar{k}}$ и $\bar{P}_{\bar{k}}$ играют роль соответственно обобщённой координаты и обобщённого импульса. Векторы $\bar{Q}_{\bar{k}}$ и $\bar{P}_{\bar{k}}$ имеют две независимые составляющие, соответствующие двум взаимно перпендикулярным направлениям поляризации, которые мы будем фиксировать индексом α . Тем самым (7) можно переписать в виде

$$W = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\bar{k}} W_{\bar{k}\alpha} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\bar{k}} (\bar{P}_{\bar{k}\alpha}^2 + \omega^2 \bar{Q}_{\bar{k}\alpha}^2) / 2. \quad (6.1.10)$$

Структура выражения (10) показывает, что $W_{k\alpha}$ можно рассматривать как полную энергию линейного гармонического осциллятора $\bar{k}\alpha$ -типа, складывающаяся из кинетической $(\bar{P}_{\bar{k}\alpha}^2 / 2)$ и потенциальной $(\omega^2 \bar{Q}_{\bar{k}\alpha}^2 / 2)$ энергий. Каждому такому осциллятору можно поставить в соответствие плоскую монохроматическую волну с волновым вектором \bar{k} и поляризацией α .

Квантование энергии электромагнитного поля, таким образом, может быть осуществлено аналогично квантованию энергии осциллятора, которое, как известно, производится путём перехода от величин $\bar{P}_{\bar{k}\alpha}$ и $\bar{Q}_{\bar{k}\alpha}$ к соответствующим операторам $\hat{p}_{\bar{k}\alpha}$ и $\hat{q}_{\bar{k}\alpha}$. С их помощью квантовомеханический гамильтониан осциллятора может быть записан в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2). \quad (6.1.11)$$

Заменим \hat{q} и \hat{p} на пару операторов \hat{a} и \hat{a}^+ :

$$\hat{a} = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \quad (6.1.12)$$

$$\hat{a}^+ = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (6.1.13)$$

С учётом (12), (13) гамильтониану (11) можно придать вид

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (6.1.14)$$

Введём волновую функцию $\Psi(N_{\bar{k}\alpha}, t)$. Квадрат её модуля задаёт вероятность того, что в момент t в $\bar{k}\alpha$ -состоянии находится $N_{\bar{k}\alpha}$ фотонов. Воздействуя операторами $\hat{a}_{\bar{k}\alpha}^-$ и $\hat{a}_{\bar{k}\alpha}^+$ на функцию $\Psi(N_{\bar{k}\alpha}, t)$, получаем

$$\hat{a}_{\bar{k}\alpha}^- \Psi(N_{\bar{k}\alpha}, t) = \sqrt{N_{\bar{k}\alpha}} \Psi(N_{\bar{k}\alpha} - 1, t), \quad (6.1.15)$$

$$\hat{a}_{\bar{k}\alpha}^+ \Psi(N_{\bar{k}\alpha}, t) = \sqrt{N_{\bar{k}\alpha} + 1} \Psi(N_{\bar{k}\alpha} + 1, t). \quad (6.1.16)$$

Из (15), (16) видно, что действие оператора $\hat{a}_{\bar{k}\alpha}^-$ приводит к уничтожению одного фотона в $\bar{k}\alpha$ -состоянии, а действие оператора $\hat{a}_{\bar{k}\alpha}^+$ – к рождению такого же фотона. Поэтому операторы $\hat{a}_{\bar{k}\alpha}^-$ и $\hat{a}_{\bar{k}\alpha}^+$ получили название операторов соответственно уничтожения и рождения фотона.

Используя выражения (14), (15), (16), легко установить, что собственное значение оператора \hat{H} , определяемое из уравнения

$$\hat{H}\Psi(N_{\bar{k}\alpha}, t) = W_{\bar{k}\alpha} \Psi(N_{\bar{k}\alpha}, t), \quad (6.1.17)$$

равно

$$W_{\bar{k}\alpha} = \hbar\omega \left(N_{\bar{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right). \quad (6.1.18)$$

Как следует из (18), даже в отсутствие фотонов энергия поля отлична от нуля. Энергия

$$W_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega \quad (6.1.17)$$

называется энергией нулевых колебаний электромагнитного осциллятора.

§ 6.2. Гамильтониан электрона в поле квантованного излучения

Осуществив квантование свободного электромагнитного поля, перейдём к рассмотрению системы, состоящей из электрона и излучения. Будем считать, что электрон имеет скорость малую по сравнению со скоростью света и описывается нерелятивистским квантовомеханическим гамильтонианом, который с учётом (2.2.1) может быть записан в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} + \frac{e}{c} \hat{A} \right)^2 + U + H_{изл.}. \quad (6.2.1)$$

Из (1) следует, что

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U + \frac{e}{mc} (\hat{p}\hat{A}) + \frac{e^2}{2mc^2} \hat{A}^2 + H_{изл.}. \quad (6.2.2)$$

Первые два слагаемых в (2) представляют собой гамильтониан электрона в атоме (в отсутствие поля), последнее слагаемое означает гамильтониан свободного поля излучения. Гамильтониан взаимодействия электрона с полем излучения имеет вид

$$\hat{V} = \frac{e}{mc} (\hat{p}\hat{A}) + \frac{e^2}{2mc^2} \hat{A}^2. \quad (6.2.3)$$

Оператору A при помощи выражений (6.1.5), (6.1.8), (6.1.9), (6.1.12), (6.1.13) может быть придан вид

$$\hat{A} = \sum_s (\hat{a}_s \bar{A}_s + \hat{a}_s^+ \bar{A}_s^*). \quad (6.2.4)$$

Здесь s обозначает совокупность индексов α и \bar{k} , т.е. идентифицирует определённую плоскую монохроматическую волну. Вектор A_s равен

$$\bar{A}_s = \bar{e}_s \sqrt{2\pi c^2 \hbar / V \omega_s} \exp(i\bar{k}_s \bar{r}), \quad (6.2.5)$$

где \bar{e}_s – единичный вектор поляризации s -й волны, \bar{r} – радиус-вектор электрона, который также следует рассматривать как оператор.

Состояние полного поля можно записать как $|N_{S_1}, N_{S_2}, \dots\rangle$. Операторы \hat{a}_s и \hat{a}_s^+ , относящиеся к определённой волне, действуют только на её фотоны. Так,

$$\hat{a}_{S_i} \left| N_{S_1}, N_{S_2}, N_{S_3}, \dots, N_{S_i}, \dots \right\rangle = N_{S_i}^{1/2} \left| N_{S_1}, N_{S_2}, \dots, N_{S_i} - 1, \dots \right\rangle, \quad (6.2.6)$$

$$\hat{a}_{S_i}^+ \left| N_{S_1}, N_{S_2}, N_{S_3}, \dots, N_{S_i}, \dots \right\rangle = (N_{S_i} + 1)^{1/2} \left| N_{S_1}, N_{S_2}, \dots, N_{S_i} + 1, \dots \right\rangle. \quad (6.2.7)$$

Для оператора \hat{A}^2 , входящего в (3), можно записать выражение

$$\hat{A}^2 = \sum_{s,s'} \left\{ \hat{a}_s \hat{a}_{s'} (\bar{A}_s \bar{A}_{s'}) + \hat{a}_s \hat{a}_{s'}^+ (\bar{A}_s \bar{A}_{s'}^*) + \hat{a}_s^+ \hat{a}_{s'} (\bar{A}_s^* \bar{A}_{s'}) + \hat{a}_s^+ \hat{a}_{s'}^+ (\bar{A}_s^* \bar{A}_{s'}^*) \right\}. \quad (6.2.8)$$

Учитывая свойства (6) и (7) операторов \hat{a}_s , \hat{a}_s^+ , можно сделать вывод, что оператор \hat{A}^2 описывает двухфотонные процессы. При таких процессах происходит испускание или поглощение двух фотонов или испускание одного фотона и поглощение другого.

В двухфотонные процессы даёт вклад также и оператор $\frac{e(\hat{p}\hat{A})}{mc}$, но уже во втором приближении теории возмущений. Вероятность двухфотонных процессов значительно уступает вероятности однофотонных. Последняя зависит от оператора $\frac{e(\hat{p}\hat{A})}{mc}$.

§ 6.3. Поглощение и испускание фотонов

Рассчитаем вероятность однофотонного поглощения и испускания. Предположим, что состояние электрона до поглощения описывается функцией φ_n , а после поглощения – функцией φ_m . Переход $n \rightarrow m$ идёт, таким образом, с поглощением фотона, а $m \rightarrow n$ – с излучением фотона частоты ω_s . Матричный элемент оператора возмущения при поглощении фотона имеет вид

$$\langle m, N_s - 1 | \hat{V} | n, N_s \rangle = \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{V\omega}} \sqrt{N_s} \left((\bar{p}\bar{e}_s) e^{i\bar{k}\bar{r}} \right)_{nm}. \quad (6.3.1)$$

где \hat{V} включает в себя лишь первое слагаемое в (6.2.3), отвечающее за однофотонные процессы, а

$$\left((\bar{p}\bar{e}_s) e^{i\bar{k}\bar{r}} \right)_{nm} = \int \varphi_m^*(\bar{r}) (\bar{p}\bar{e}_s) \exp(i\bar{k}\bar{r}) \varphi_n(\bar{r}) dV. \quad (6.3.2)$$

Однофотонные процессы соответствуют первому приближению теории возмущений. Поэтому для определения вероятности однофотонного поглощения можно воспользоваться формулой (5.2.9), считая, что матричный элемент в ней задаётся выражением (1). Поскольку энергия падающего на вещество фотона может меняться непрерывным образом, то процесс поглощения фотона в системе поле-вещество следует рассматривать как переход из размытого состояния на дискретный уровень. Тем самым функцию $\varphi(E)$ в (5.2.9) следует рассматривать не как плотность конечных, а как плотность начальных состояний. Функция $\varphi(E)$ совпадает с точностью до аргумента с функцией $g(\omega)$, задаваемой выражением (6.1.4) и определяющей число радиационных осцилляторов в интервале частот $d\omega$:

$$\varphi(E) = g(\omega) \frac{d\omega}{dE} = \hbar^{-1} g(E/\hbar). \quad (6.3.3)$$

Считая, что излучение имеет определённую поляризацию и распространяется внутри телесного угла $d\Omega$, можно с помощью (6.1.4) установить для него плотность радиационных осцилляторов

$$d\varphi = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3 \hbar} \frac{d\Omega}{8\pi}. \quad (6.3.4)$$

Путём подстановки (1) и (2) в (5.2.9) находим вероятность однофотонного поглощения

$$d\omega_\alpha = \frac{e^2 \omega}{2\pi \hbar c^3 m^2} N_s \left| \left((\bar{p}\bar{e}_s) e^{i\bar{k}\bar{r}} \right)_{nm} \right|^2 d\Omega. \quad (6.3.5)$$

Аналогичные рассуждения позволяют установить выражение и для вероятности однофотонного испускания света. Соответствующий матричный элемент имеет вид

$$\langle m, N_S + 1 | \hat{V} | n, N_S \rangle = \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar(N_S + 1)}{V\omega_S}} \left((\bar{p}\bar{e}_S) e^{-i\bar{k}\bar{r}} \right)_{nm}. \quad (6.3.6)$$

Используя выражение (5.2.9), находим, что вероятность испускания

$$d\omega_r = \frac{e^2 \omega}{2\pi\hbar c^3 m^2} (N_S + 1) \left| \left((\bar{p}\bar{e}_S) e^{-i\bar{k}\bar{r}} \right)_{nm} \right|^2 d\Omega. \quad (6.3.7)$$

Два слагаемых, присутствующих в (7), свидетельствуют о том, что $d\omega_r$ складывается из вероятности спонтанного испускания

$$d\omega_{sr} = \frac{e^2 \omega}{2\pi\hbar c^3 m^2} \left| \left((\bar{p}\bar{e}_S) e^{-i\bar{k}\bar{r}} \right)_{nm} \right|^2 d\Omega \quad (6.3.8)$$

и вероятности индуцированного испускания

$$d\omega_{ir} = \frac{e^2 \omega N_S}{2\pi\hbar c^3 m^2} \left| \left((\bar{p}\bar{e}_S) e^{-i\bar{k}\bar{r}} \right)_{nm} \right|^2 d\Omega. \quad (6.3.9)$$

С практической точки зрения приведённые выше выражения для вероятностей переходов целесообразно преобразовать так, чтобы в них вместо числа фотонов N_S входила плотность мощности поляризованного излучения $I_0(\omega)$. Предположим, что излучение с такой интенсивностью распространяется в телесном угле $d\Omega$ и занимает интервал частот $d\omega$. Число радиационных осцилляторов в указанных интервалах равно $\omega^2 V d\omega d\Omega / (2\pi c)^3$. Число фотонов N в единице объёма V будет определяться выражением

$$N = N_S \omega^2 d\omega d\Omega / (2\pi c)^3. \quad (6.3.10)$$

Плотность электромагнитной энергии в единице объёма $\rho(\omega)$ будет равна

$$\rho(\omega) = N\hbar\omega. \quad (6.3.11)$$

Умножая ее на c , получаем

$$I_0(\omega) d\Omega d\omega = c\hbar\omega \frac{N_S \omega^2}{(2\pi c)^3} d\Omega d\omega. \quad (6.3.12)$$

Откуда

$$I_0(\omega) = \frac{N_S \hbar \omega^3}{(2\pi)^3 c^2}. \quad (6.3.13)$$

Одновременно с введением величины $I_0(\omega)$ перейдём к дипольному приближению. Во-первых, учтём, что в оптическом диапазоне длина волны λ намного превосходит размеры атома a ($\lambda \gg a$). Так как $r \leq a$, то $(\bar{k}\bar{r}) \ll 1$ и

$$\exp(\pm i\bar{k}\bar{r}) \approx 1. \quad (6.3.14)$$

Примем во внимание также следующие соотношения:

$$(\bar{p}\bar{e}_S)_{nm} = (\bar{p}_{nm})\bar{e}_S = i\frac{m\omega}{e}(\bar{\mu}_{nm})\bar{e}_S, \quad (6.3.15)$$

где $\bar{\mu}_{nm}$ – матричный элемент дипольного момента перехода. В отличие от рассмотрения, проведённого в главе II, мы не будем считать среду изотропной. Тем самым, направление $\bar{\mu}_{nm}$ не должно в общем случае совпадать с \bar{e}_S . Обозначим угол между $\bar{\mu}_{nm}$ и \bar{e}_S через β . Тогда с учётом (13)-(15) выражения (5), (8), (9) примут вид (для случая, когда $\bar{\mu}_{nm} = \bar{\mu}_{nm}$)

$$d\omega_\alpha^D = d\omega_{ir}^D = \frac{I_0(\omega)}{c} b_{nm} d\Omega, \quad (6.3.16)$$

$$d\omega_{S_r}^D = a_{nm} d\Omega, \quad (6.3.17)$$

где b_{nm} и a_{nm} – дифференциальные коэффициенты Эйнштейна для индуцированного поглощения и спонтанного излучения, равные

$$b_{nm} = \left(\frac{2\pi}{\hbar}\right)^2 |\bar{\mu}_{nm}|^2 \cos^2 \beta, \quad (6.3.18)$$

$$a_{nm} = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3} |\bar{\mu}_{nm}|^2 \cos^2 \beta. \quad (6.3.19)$$

Для случая изотропного излучения и поглощения, когда свет распространяется по всем направлениям, выражения (18) и (19) необходимо проинтегрировать по всем возможным направлениям вектора \bar{k} , или соответственно β . В результате такого интегрирования дифференциальные коэффициенты b_{nm} и a_{nm} переходят в интегральные коэффициенты Эйнштейна

$$B_{nm} = \frac{2\pi |\bar{\mu}_{nm}|^2}{3\hbar^2}, \quad (6.3.20)$$

$$A_{nm} = \frac{4\omega^3 |\bar{\mu}_{nm}|^2}{3\hbar c^3}. \quad (6.3.21)$$

Знание величины A_{nm} позволяет определить время τ^D жизни атома в возбуждённом состоянии по отношению к дипольному спонтанному излучению

$$\tau^D = 1/A_{nm} = \frac{3\hbar c^3}{4\omega^3 |\bar{\mu}_{nm}|^2}. \quad (6.3.22)$$

§ 6.4. Рассеяние света как двухфотонный процесс

Перейдём теперь от рассмотрения однофотонных процессов к анализу двухфотонного взаимодействия излучения с веществом. В качестве важного примера такого двухфотонного взаимодействия рассмотрим явление рассеяния света атомами. Предположим, что на атом падает фотон с волновым век-

тором \bar{k}_1 , а испускается фотон с вектором \bar{k}_2 . Обозначим соответствующие частоты фотонов через ω_1 и ω_2 , а векторы поляризации – через e_1 и e_2 . Если частоты падающего и рассеянного фотона равны ($\omega_1 = \omega_2$) и атом после взаимодействия возвращается в исходное состояние, то рассеяние называется когерентным (релеевским). Наряду с когерентным возможно и комбинационное рассеяние света, происходящее с изменением частоты. Из закона сохранения энергии легко установить связь между частотами падающего и рассеянного фотонов

$$\hbar\omega_2 = \hbar\omega_1 + E_n - E_m, \quad (6.4.1)$$

где E_n – энергия атома в начальном состоянии φ_n , а E_m – в конечном – φ_m . Для удобства записи последующих соотношений представим оператор возмущения в виде суммы

$$\hat{V} = \hat{h}_1 + \hat{h}_2, \quad (6.4.2)$$

где \hat{h}_1 и \hat{h}_2 – операторы, равные соответственно первому и второму слагаемому в правой части (6.2.3). Из выводов, сделанных в разделе 5.2, следует, что гамильтониан \hat{h}_2 описывает двухфотонные процессы в первом приближении теории возмущений, а гамильтониан \hat{h}_1 – во втором. Иными словами \hat{h}_2 описывает рассеяние света как прямые переходы, а \hat{h}_1 – как переходы через промежуточные состояния. Используя (5.2.9) и (5.3.1), запишем вероятность рассеяния света dW_{nm} в виде

$$dW_{nm} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle m | \hat{h}_2 | n \rangle + \sum_k \frac{\langle m | \hat{h}_1 | k \rangle \langle k | \hat{h}_1 | n \rangle}{W_n - W_k} \right|^2 d\varphi. \quad (6.4.3)$$

Здесь $d\varphi$ – плотность конечных состояний, определяемая согласно (6.3.4) выражением

$$d\varphi = V\omega_2^2 d\Omega / (2\pi c)^3 \hbar, \quad (6.4.4)$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла, в котором рассеивается фотон. Заметим, что не случайно в знаменателе членов, стоящих в (3) под знаком суммы, фигурирует разность $W_n - W_k$ (а не $E_n - E_k$). W_i в данном случае равно энергии всей квантовой системы, включающей как энергию электрона, так и фотонов. Будем считать, что в начальном состоянии поле излучения состоит из N_1 фотонов в состоянии $S = 1$ и N_2 фотонов в состоянии $S = 2$. Рассеяние приведёт к тому, что указанные числа заполнения примут соответственно значения $N_1 - 1$ и $N_2 + 1$.

Как и в случае однофотонных переходов, определение вероятности рассеяния света сведётся к корректному расчёту матричных элементов гамильтонианов возмущения. Используя формулы (6.2.5) и (6.2.8), можно установить, что

$$\langle m|\hat{h}_2|n\rangle = \frac{2\pi\hbar e^2(\bar{e}_1\bar{e}_2)}{mV\sqrt{\omega_1\omega_2}} \sqrt{N_1(N_2+1)} \int \varphi_m^* \exp[i(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)\bar{r}] \varphi_n dV. \quad (6.4.5)$$

Используя приближение (6.3.14), можно положить экспоненциальную функцию в (5) равной единице. Тогда с учётом ортогональности функций φ_n и φ_m перепишем (5) в виде

$$\langle m|\hat{h}_2|n\rangle = \frac{2\pi\hbar e^2(\bar{e}_1\bar{e}_2)}{mV\sqrt{\omega_1\omega_2}} \sqrt{N_1(N_2+1)} \delta_{nm}. \quad (6.4.6)$$

И так, если состояние атома при рассеянии света не меняется и $\varphi_n = \varphi_m$, то $\delta_{nm} = 1$. Если же состояние изменяется, то $\delta_{nm} = 0$. Таким образом, матричный элемент $\langle m|\hat{h}_2|n\rangle$ характеризует лишь когерентные двухфотонные процессы.

При расчёте входящей в (3) суммы по k следует учесть, что возможны два типа промежуточных состояний, по которым производится суммирование. При переходе в промежуточное состояние первого типа происходит поглощение фотона в состоянии $S=1$, затем при последующем переходе из промежуточного состояния в конечное испускается фотон, у которого $S=2$. При переходе в промежуточное состояние второго типа сначала происходит излучение фотона с $S=2$, затем поглощается фотон с $S=1$ и система переходит из промежуточного состояния в конечное. С учётом этого обстоятельства, а также с использованием свойств оператора \hat{h}_1 , вытекающих из соотношений (6.2.3), (6.2.4) и (6.2.5) можно установить, что

$$\sum_k \frac{\langle m|\hat{h}_1|k\rangle \langle k|\hat{h}_1|n\rangle}{W_n - W_k} = \frac{2\pi\hbar e^2 \sqrt{N_1(N_2+1)}}{V\sqrt{\omega_1\omega_2}m^2} \sum_k \left[\frac{(\bar{p}\bar{e}_2)_{mk}(\bar{p}\bar{e}_1)_{kn}}{E_n - E_k + \hbar\omega_1} + \frac{(\bar{p}\bar{e}_1)_{mk}(\bar{p}\bar{e}_2)_{kn}}{E_n - E_k - \hbar\omega_2} \right]. \quad (6.4.7)$$

Первый член в квадратной скобке выражения (7) отвечает за переход через промежуточные состояния первого типа, второй член связан с промежуточными состояниями второго типа.

На основе (3) с учётом (6) и (7) можно найти дифференциальное сечение рассеяния света

$$d\sigma_{nm} = dw_{nm} \frac{V}{N_1 c} = r_0^2 \frac{\omega_2}{\omega_1} (N_2 + 1) |M_{nm}|^2 d\Omega. \quad (6.4.8)$$

где $r_0 = e^2 / mc = 2,8 \cdot 10^{-15}$ м – классический радиус электрона,

$$M_{nm} = (\bar{e}_1\bar{e}_2)\delta_{12} + \frac{1}{m} \sum_k \left[\frac{(\bar{p}\bar{e}_2)_{mk}(\bar{p}\bar{e}_1)_{kn}}{E_n - E_k + \hbar\omega_1} + \frac{(\bar{p}\bar{e}_1)_{mn}(\bar{p}\bar{e}_2)_{kn}}{E_n - E_k - \hbar\omega_2} \right]. \quad (6.4.9)$$

В (8) можно выделить два слагаемых. Одно из них

$$d\sigma_{nm,i} = r_0^2 \frac{\omega_2}{\omega_1} N_2 |M_{mn}|^2 d\Omega. \quad (6.4.10)$$

характеризует сечение вынужденного рассеяния, другое

$$d\sigma_{nm,s} = r_0^2 \frac{\omega_2}{\omega_1} |M_{mn}|^2 d\Omega \quad (6.4.11)$$

определяет сечение спонтанного рассеяния.

При когерентном рассеянии света, когда $\varphi_n = \varphi_m$ и $\omega_1 = \omega_2$ дифференциальное сечение рассеяния приобретает вид

$$d\sigma = r_0^2 (N_2 + 1) \left| \cos\theta + \frac{1}{m} \sum_k \left[\frac{(\bar{p}\bar{e}_2)_{nk} (\bar{p}\bar{e}_2)_{kn}}{E_1 - E_k + \hbar\omega_1} + \frac{(\bar{p}\bar{e}_1)_{nk} (\bar{p}\bar{e}_2)_{kn}}{E_1 - E_k - \hbar\omega_1} \right] \right|^2 d\Omega. \quad (6.4.12)$$

Если энергия падающего фотона намного превосходит энергию связи электрона, так что $\hbar\omega_1 \gg E_n - E_k$, то (12) упрощается:

$$d\sigma = r_0^2 (N_2 + 1) \cos^2 \theta d\Omega. \quad (6.4.13)$$

Это выражение совпадает с известной классической формулой рассеяния света на свободном электроде.

Для чисто комбинационного рассеяния, когда $\varphi_n \neq \varphi_m$ и $\omega_1 \neq \omega_2$ формула (8) может быть переписана следующим образом:

$$d\delta_{nm} = r_0^2 \frac{\omega_2}{\omega_1} (N_2 + 1) \left| \frac{1}{m} \sum_k \left[\frac{(\bar{p}\bar{e}_2)_{mk} (\bar{p}\bar{e}_1)_{kn}}{E_1 - E_k + \hbar\omega_1} + \frac{(\bar{p}\bar{e}_1)_{mk} (\bar{p}\bar{e}_2)_{kn}}{E_1 - E_k - \hbar\omega_2} \right] \right|^2 d\Omega. \quad (6.4.14)$$

Из неё видно, что комбинационное рассеяние связано только с переходами через промежуточные состояния.

§ 6.5. Многофотонный резонанс

Изложенные во второй главе результаты, описывающие динамику двухуровневой системы в резонансном внешнем поле, относятся к однофотонному взаимодействию. С использованием материала настоящей и предшествующей глав они могут быть обобщены на случай, когда резонанс является многофотонным, т.е. расстояние между уровнями близко к целому числу величин $\hbar\omega$. Естественно, такие резонансы имеют место в полях с существенно более высокой интенсивностью, чем при однофотонном резонансе.

Для реализации двухфотонного резонанса необходимо, чтобы рассматриваемые уровни имели одинаковую чётность. Поэтому, в отличие от однофотонного резонанса двухфотонный резонанс, строго говоря, не может быть описан лишь в рамках двухуровневой модели. Этот эффект может проявляться лишь при наличии дополнительных уровней, переходы на которые из основного состояния, а также переходы с которых в конечное состояние являются разрешёнными для дипольного взаимодействия.

С учётом (1.2.11) уравнения (2.1.3) и (2.1.4) для двухфотонного резонанса могут быть модернизированы следующим образом:

$$i\hbar \frac{da_{nn}}{dt} = \Lambda_{mn} a_{nm} \exp(-i\Delta_2 t) + \Lambda_{nn} a_{nn}, \quad (6.5.1)$$

$$i\hbar \frac{da_{nm}}{dt} = \Lambda_{nm} a_{nn} \exp(i\Delta_2 t) + \Lambda_{mm} a_{nm}, \quad (6.5.2)$$

где Λ_{mn} – матричный элемент оператора возмущений, рассчитанный во втором порядке (см. (5.3.2)).

Отличительной особенностью уравнений (1) и (2) по отношению к аналогичным уравнениям, записанным в 1-м порядке теории возмущений, является то, что в них присутствуют диагональные матричные элементы оператора возмущений Λ_{nn} и Λ_{mm} . Последние в отличие от диагональных матричных элементов, рассчитанных в первом порядке, не равны нулю.

Анализ решения системы (1) и (2) показывает, что ему может быть придан вид, схожий с выражением (2.3.13) и (2.3.14). Различие состоит лишь в том, что присутствующая в них частота осцилляций амплитуд вероятностей Ω должна быть заменена на частоту Ω_2 равную

$$\Omega_2 = \frac{1}{2\hbar} \left[(2\hbar\omega - \hbar\omega_2 + \Lambda_{mm} - \Lambda_{nn})^2 + 4\Lambda_{mn}^2 \right]^{1/2}. \quad (6.5.3)$$

Из сравнения (3) с формулами (2.3.15) и (2.3.21) видно, что ширина двухфотонного резонанса, определяемая квадратом элемента Λ_{mn} , в силу малости последнего значительно меньше ширины однофотонного резонанса.

Глава 7. Светодинамика атомов

Поглощение и излучение фотонов атомами приводит к ряду динамических эффектов, представляющих интерес как с практической, так и с теоретической точек зрения. В настоящей главе рассматривается так называемый селективный эффект светового давления на атомы, возникающий при резонансном взаимодействии излучения с атомными системами.

§ 7.1. Сила светового давления

Для простоты будем считать, что в поле световой волны находится двухуровневый атом. Условие стационарности процессов в системе имеет вид

$$N_+ = N_- + N_i, \quad (7.1.1)$$

где N_+ – число поглощённых фотонов, N_- – число вынужденно излучённых фотонов, N_i – число спонтанно испускаемых фотонов. Волновые векторы поглощаемого \bar{k}_+ и вынужденно испускаемого \bar{k}_- фотонов параллельны и направлены в одну сторону. Волновой вектор \bar{k}_i спонтанно испускаемого фотона случайным образом ориентирован относительно векторов \bar{k}_+ и \bar{k}_- .

Если в начальный момент времени $t=0$ импульс фотона равен \bar{p}_0 , то спустя время $\Delta t \gg \tau_2$, где τ_2 – время жизни атома в возбуждённом состоянии, импульс станет равным

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \Delta\bar{p} = \bar{p}_0 + \hbar\bar{k}(N_+ - N_-) + \sum_i^{N_i} \hbar\bar{k}_i, \quad (7.1.2)$$

(убрать индекс i) где величина $\hbar\bar{k}$ характеризует изменение импульса атома при поглощении и испускании. Второй член в выражении (2) определяет изменение импульса в результате вынужденных переходов, а третий – за счёт спонтанных.

В случае сильного светового поля, когда вероятность вынужденного перехода значительно превосходит вероятность спонтанного испускания, последним членом в (2) можно пренебречь. При не слишком интенсивном излучении вероятность спонтанных переходов нельзя считать пренебрежимо малой величиной и число актов поглощения может заметным образом превосходить число актов вынужденного испускания. Последнее обстоятельство приводит к тому, что импульс атома в среднем увеличивается в направлении \bar{k}_+ . Движение атома носит характер дрейфа в направлении \bar{k}_+ , сопровождающегося флуктуациями во всех направлениях (см. рис. 7.1).

Из соотношений (1) и (2) следует, что среднее увеличение импульса равно

$$\Delta\bar{p} = \hbar\bar{k}(N_+ - N_-) = \hbar\bar{k}N_i. \quad (7.1.3)$$

Используя последнее соотношение, находим, что сила светового давления на атом равна:

$$\bar{G} = \Delta\bar{p} / \Delta t = \hbar\bar{k}\Delta N_i / \Delta t = \hbar\bar{k}dN_i / dt. \quad (7.1.4)$$

Число спонтанных переходов с верхнего состояния в единицу времени dN_i / dt можно выразить через вероятность спонтанного перехода с верхнего уровня $\omega_{2 \rightarrow 1}$ и естественную ширину γ_2 этого уровня:

$$dN_i / dt = n_2 \omega_{2 \rightarrow 1} \approx n_2 \gamma_2. \quad (7.1.5)$$

Здесь n_2 – заселённость верхнего уровня.

С учётом того, что её максимальное значение равно $1/2$, из (4) и (5) находим выражение для максимальной силы светового давления

$$G_{\max} = \hbar\bar{k}\gamma_2 / 2 = \hbar\bar{k}\tau_2^{-1} / 2, \quad (7.1.6)$$

где τ_2 – естественное время жизни атома в верхнем состоянии. Выражения (5) и (6) примечательны в том отношении, что связывают классическую величину – силу – с квантовыми характеристиками резонансного взаимодействия.

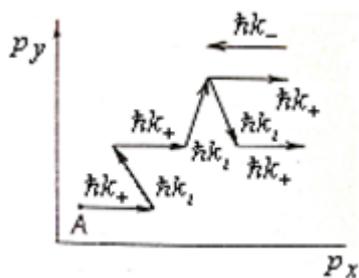


Рис. 7.1. Изменение импульса атома A в результате поглощения и испускания фотонов; $|\bar{k}_+| = |\bar{k}_-| = |\bar{k}_i|$.

§ 7.2. Ускорение и замедление атомов в световом поле

Описанный выше механизм светового давления обуславливает ускорение атомов в световом поле. Однако, интенсивность этого процесса невелика. Действительно, оценки, выполненные по формуле (7.1.6), для характерных оптических переходов дают для G_{\max} значения порядка $10^{-3} - 10^{-4}$ эВ/см. Эта величина столь мала, что эффективно ускорять атом, используя световое давление, практически невозможно.

Ещё более проблематичной, на первый взгляд, представляется возможность замедлять движение атома, воздействуя на него световой волной. Однако, если посмотреть на взаимодействие атома со светом, как на процесс рассеяния фотонов, можно увидеть некоторую перспективу в использовании антистоксова рассеяния. При таком рассеянии энергия рассеянного фотона превосходит энергию падающего. Передача световому полю дополнительной энергии возможна лишь за счёт энергии атома. Потеря последней приводит к уменьшению его скорости.

Потеря энергии атомом при взаимодействии со светом может происходить также за счёт эффекта Доплера. Пусть навстречу друг другу распространяются два пучка, один из которых световой, а другой – атомарный. Атомы по-прежнему будем считать двухуровневыми. Частоту перехода в покоящейся двухуровневой системе положим равной ω_0 . В силу эффекта Доплера для резонансного взаимодействия с атомами частота ω света, распространяющегося навстречу атомам, должна быть меньше ω_0 , а именно

$$\omega = \omega_0(1 - v/c) < \omega_0, \quad (7.2.1)$$

где v – скорость атомов. Тем самым, в ходе рассматриваемого процесса поглощаются фотоны с частотой $\omega < \omega_0$, а излучаются (спонтанно) фотоны с частотой ω_0 . Таким образом, при каждом акте взаимодействия кинетическая энергия атома уменьшается на величину

$$\Delta E = \hbar\omega(v/c). \quad (7.2.2)$$

Физической причиной замедления движения атома является то, что поглощается фотон в лабораторной системе координат, а излучается – в системе, связанной с атомом. Как видно из соотношения (1), световое давление тормозит атомы, обладающие скоростью $v_{\text{рез}} = c(1 - \omega/\omega_0)$. Число таких атомов в процессе взаимодействия уменьшается. Поскольку при этом возрастает число атомов с невысокими скоростями, дальнейшее торможение атомного пучка возможно лишь при изменении частоты излучения.

Из формулы (2) следует, что для уменьшения энергии атома на величину 10^{-2} эВ, т.е. для практически полного охлаждения атомов, имеющих в начале комнатную температуру, необходимо $\sim 10^4$ актов поглощения излучения. Эта величина вполне достижима при длительности взаимодействия атомов с полем $\tau \sim 10^4 \tau_2 \sim 10^{-4}$ с и длине пути атомов в поле ~ 1 см.

Таким образом, выше проведённое рассмотрение показывает, что использование эффектов светового давления не является перспективным с точ-

ки зрения ускорения атомов. В то же время их эффективность весьма значительна при организации замедления частиц газа.

§ 7.3. Светоиндуцированный дрейф в смеси атомов

В отличие от рассмотренных выше эффектов явление светоиндуцированного дрейфа в смеси атомов не связано с проявлением светового давления. Однако и оно обусловлено резонансным возбуждением атомов.

Рассмотрим газ, состоящий из атомов двух сортов A и B . Будем считать давление газа достаточно высоким, так что среднее время между соударениями атомов меньше времени жизни в возбуждённом состоянии. Направим на газ поток излучения, частота которого совпадает с частотой одного из переходов в атомах A , которые двигаются в определённом направлении, например, в направлении распространения излучения. Часть атомов, движущихся в этом направлении, окажется в возбуждённом состоянии.

Эффективное сечение соударений возбуждённых атомов A^* с атомами B больше, чем сечение соударения между атомами A и B . Это связано с тем, что размер возбуждённого атома A^* превосходит размер атома A , находящегося в основном состоянии. Различие в эффективных сечениях соударений означает, что для возбуждённых атомов, движущихся в направлении распространения излучения, длина свободного пробега λ^* меньше длины пробега λ атомов A , движущихся навстречу излучению. Последние в силу эффекта Доплера не возбуждаются лазерным излучением. Указанный процесс приводит к результирующему смещению (дрейфу) атомов A навстречу излучению. Расчёты показывают, что сила тока при этом дрейфе может быть определена из формулы

$$\mathfrak{J} = (1/3)(\lambda - \lambda^*)nv, \quad (7.3.1)$$

где n – плотность атомов A , v – их средняя скорость.

В ходе исследований эффекта светоиндуцированного дрейфа была установлена его перспективность для технологий, связанных с обогащением газовых смесей заданной компонентой. В частности, применение указанного эффекта позволяет изменять концентрацию резонансной примеси в буферном газе на несколько порядков величины, т.е. очень эффективно разделять газовые смеси.

Глава 8. Взаимодействие световых волн со свободными электронами

В предыдущих главах чаще всего предполагалось, что электроны, с которыми взаимодействует световая волна, находятся в связанном состоянии.

Если же волна будет взаимодействовать со свободными электронами, то это взаимодействие приобретает принципиально иной характер. Самым существенным является тот факт, что свободный электрон (как и любая другая заряженная частица) не может ни поглощать энергию из световой волны, ни излучать энергию в эту волну. Электрон может получать лишь небольшую энергию “отдачи” в процессе рассеяния света.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим с квантовых позиций акт поглощения фотона с частотой ω свободным электроном (диаграмма этого простейшего процесса показана на рис. 8.1). Оказывается, что такой процесс не может реализоваться, поскольку при этом не могут быть одновременно выполнены законы сохранения энергии и импульса.

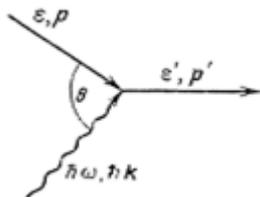


Рис. 8.1. Поглощение фотона свободным электроном.

Действительно, анализируя процесс поглощения одной частицей (электроном) другой (фотона), необходимо приравнять энергии и импульсы этих частиц до и после взаимодействия. Рассмотрим вначале случай нерелятивистского движения электрона.

Энергия электрона до взаимодействия $\varepsilon = \bar{p}^2/2m$, после взаимодействия $\varepsilon' = (\bar{p}')^2/2m$; \bar{p} , \bar{p}' – импульсы электрона до и после взаимодействия, m – его масса; энергия фотона – $\hbar\omega$, импульс – $\hbar\bar{k}$, где \bar{k} – волновой вектор, при этом $|\hbar\bar{k}| = \hbar\omega/c$. Так как

$$\varepsilon' = \varepsilon + \hbar\omega, \quad \bar{p}' = \bar{p} + \hbar\bar{k}, \quad (8.1)$$

или

$$\frac{(\bar{p} + \hbar\bar{k})^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} + \hbar\omega,$$

то

$$\frac{\hbar\omega}{2mc^2} + \frac{p}{mc} \cos\theta = 1, \quad (8.2)$$

где θ – угол между \bar{p} и \bar{p}' или

$$\cos\theta = \frac{1}{pc} \left(mc^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega \right) = \frac{c}{V} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{2mc^2} \right). \quad (8.3)$$

Обычно в оптическом диапазоне $\hbar\omega = 1 - 10$ эВ, $mc^2 \approx 0,5$ МэВ, поэтому $(1/2)\hbar\omega \ll mc^2$, и, так как в нерелятивистском случае скорость движения электрона $V \ll c$, из (3) получаем, что должно выполняться неприемлемое условие $\cos\theta \gg 1$.

Релятивистский анализ приводит к аналогичному выводу.

В релятивистском случае

$$\varepsilon = \sqrt{m^2c^2 + \bar{p}^2c^2}, \quad \varepsilon' = \sqrt{m^2c^2 + \bar{p}'^2c^2},$$

из (1) получаем

$$\cos\theta = \sqrt{1 + m^2c^2/p^2}, \quad (8.4)$$

откуда видно, что снова $\cos\theta > 1$. Тем самым мы убеждаемся, что процесс, изображённый на диаграмме рис 8.1 и состоящий в поглощении свободным электроном фотона, невозможен.

Этому факту можно дать простую интерпретацию, используя классическое описание поля с помощью уравнений Максвелла. При таком подходе уравнение движения электрона имеет вид

$$\ddot{\bar{r}} \approx +\frac{e}{m}\bar{E}(t, \bar{r}) \approx +\frac{e}{m}\bar{E}_0 \cos \omega t. \quad (8.5)$$

Его решение определяется выражением

$$\bar{r}(t) = \frac{1}{2}\bar{r}_0 \exp(-i\omega t) + \text{к.с.} = \bar{r}_0 \cos \omega t, \quad (8.6)$$

где

$$\bar{r}_0 = -\frac{e}{m\omega^2}\bar{E}_0. \quad (8.7)$$

Тогда

$$\dot{\bar{r}}(t) = +i\frac{e}{2m\omega}\bar{E}_0 \exp(-i\omega t) + \text{к.с.} = \frac{e}{m\omega}\bar{E}_0 \sin \omega t. \quad (8.8)$$

В силу последнего выражения средняя за период мощность работы поля над свободным электроном равна

$$W = \langle e\bar{E}(t)\dot{\bar{r}}(t) \rangle = e\dot{\bar{E}}_0 \left\langle \cos \omega t \left(\frac{e}{m\omega} \sin \omega t \right) \right\rangle = 0. \quad (8.9)$$

Теперь становится понятным, что неэффективность воздействия излучения на свободный электрон, связанная с тем, что мощность, передаваемая электрону равна нулю, обусловлена наличием сдвига фаз между полем и скоростью электрона, точно равного $\pi/2$.

Если в процессе взаимодействия электрона со свободной волной, он испытывает столкновение с ионами, как это имеет место в плазме, то указанный сдвиг по фазе может меняться в широком интервале. Это указывает на наличие специфической возможности поглощения электроном энергии электромагнитной волны. Реализующий её столкновительный механизм поглощения электромагнитной волны электронным газом получил название обратнотормозного поглощения или поглощения за счёт обратнотормозного эффекта. Такого рода терминология получила распространение, поскольку описанный механизм можно рассматривать в качестве обратного по отношению к эффекту тормозного излучения электрона, испытывающего соударение с более тяжёлой частицей.

Глава 9. Особенности взаимодействия излучения с металлами и полупроводниками

§ 9.1. Элементы металлооптики

В ИК- и видимой области оптического диапазона металлы хорошо отражают падающее излучение (на это указывает, в частности, характерный металлический блеск). Это объясняется высокой концентрацией в металле свободных электронов ($10^{22} - 10^{23} \text{ см}^{-3}$), которые в процессе рассеяния света формируют сильно отражённую волну. Поглощение фотонов непосред-

ственно электронами проводимости возможно только при одновременных столкновениях электронов с узлами кристаллической решётки, фононами, различного рода примесями, друг с другом, поверхностью металла, границами зёрен. (Это следует из материала главы 8). Формирование из рассеянного света отражённой волны происходит вблизи поверхности в тонком скин-слое толщиной $\delta_s \ll 1 \text{ мкм}$, в котором затухает проникающее в металл излучение.

В результате указанной роли свободных электронов оптические и электрические свойства металлов оказываются взаимосвязанными: чем больше статическая проводимость металла σ , тем сильнее он отражает свет. Отклонения возникают при низких температурах и на высоких частотах (начиная с видимой области спектра и выше), когда важную роль играют квантовые эффекты, связанные, в частности, с межзонными переходами. В ультрафиолетовом и более коротковолновом диапазонах с излучением взаимодействуют электроны внутренних оболочек атомов, например, в рентгеновской области спектра металлы уже не отличаются от диэлектриков по оптическим свойствам.

Теорию взаимодействия излучения с металлами несложно построить, если в уравнениях Максвелла для диэлектриков заменить диэлектрическую проницаемость ε комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = \varepsilon - i\sigma/\omega, \quad (9.1.1)$$

то получим уравнения для проводящих сред.

В комплексной форме можно представить и волновое число. Известно, что в диэлектрической среде между волновым числом $k(\omega)$, частотой ω и диэлектрической проницаемостью существует дисперсионное соотношение

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_m^2} = \omega^2 \mu \varepsilon = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}. \quad (9.1.2)$$

Для проводящей среды волновое число следует заменить комплексным волновым числом

$$k^2(\omega) = \omega^2 \varepsilon \mu - i\omega \sigma \mu = (k(\omega) - is)^2. \quad (9.1.3)$$

В вышеприведённых формулах σ - проводимость среды, связывающая плотность тока j с напряжённостью электрического поля E ($j = \sigma E$), $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, $\mu = \mu_0 \mu_r$, ε_r, μ_r - относительные соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, c_m - скорость света в среде, $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ - скорость света в вакууме.

Вновь разделяя действительные и мнимые части комплексного волнового числа, получим

$$\begin{aligned} k^2(\omega) &= \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \right)^2} + 1 \right], \\ s^2(\omega) &= \frac{\omega^2 \varepsilon \mu}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega} \right)^2} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

Для проводящей среды решения уравнений Максвелла в виде плоских волн будут иметь вид

$$\begin{aligned} E &= E_0 \exp\{-i[\omega t - (k - is)z]\} = E_0 \exp(-sz) \exp[-i(\omega t - kz)], \\ H &= H_0 \exp\{-i[\omega t - (k - is)z]\} = H_0 \exp(-sz) \exp[-i(\omega t - kz)]. \end{aligned} \quad (9.1.5)$$

Обычно $\sigma/\varepsilon_r \varepsilon \omega \approx \sigma/\varepsilon \omega \gg 1$, следовательно, в (4) можно пренебречь стоящей в квадратных скобках единицей. Выражение для δ примет вид

$$\delta = \frac{1}{s} = \sqrt{\frac{2}{\sigma \omega \mu}}. \quad (9.1.6)$$

Формула (6) тем точнее, чем больше частота электромагнитной волны. Выразим величину $s = 1/\delta$ через плазменную частоту ω_p :

$$s = \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu}{2}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu_r}{2 \varepsilon_0}} = \frac{\omega_p}{c} \sqrt{\frac{\omega \mu_r}{2 \gamma}}, \quad (9.1.7)$$

где проводимость $\sigma = Ne^2/(m\gamma)$, величина $\gamma = \frac{e^2 N}{me^2}$ характеризует частоту столкновения электронов с кристаллической решёткой или частоту релаксации электронов проводимости (N - плотность электронов), $\omega_p = e \sqrt{\frac{N}{m \varepsilon_0}}$ -

плазменная частота, которая играет для плазмы роль собственной частоты; она характеризует не отдельные частицы (их собственные частоты можно приравнять нулю), а весь коллектив заряженных частиц, из которых состоит плазма.

На практике обычно $\mu_r \approx 1$, поэтому

$$s = \frac{\omega_p}{c} \sqrt{\frac{\omega}{2\gamma}}, \quad \delta = \frac{c}{\omega_p} \sqrt{\frac{2\gamma}{\omega}}. \quad (9.1.8)$$

Для меди $\sigma = 5,14 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$. Для световых волн ($\lambda \approx 0,5 \text{ мкм}$) глубина проникновения $\delta = 3 \text{ нм}$, т.е. говорить о распространении света в проводнике не имеет смысла. Однако уже для радиоволн ($\lambda = 10^3 \text{ м}$) глубина проникновения составляет $\delta = 2,5 \text{ мм}$. Используя эти оценки, легко определить те толщины листового металла, которые необходимы для экранирования соответствующих длин электромагнитных волн. Отметим, что электромагнитные волны, особенно низкочастотные ($\omega \varepsilon/\sigma \ll 1$), хорошо отражаются от металлов. Это отражение, как ни странно, физически связано с затуханием электромагнитной волны в тонком поверхностном слое металла (формула 8). Волна затухает в металле на глубине порядка λ , поэтому она не успевает передать значительную часть своей энергии свободным электронам и почти полностью отражается. Интересно отметить, что и фазовая скорость в проводящей среде уменьшается. Действительно,

$$c_m = \frac{k}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \left\{ \frac{2}{\left[1 + (\sigma/\omega\varepsilon)^2\right]^{1/2} + 1} \right\}^{1/2}. \quad (9.1.9)$$

Следовательно, фазовая скорость электромагнитной волны в проводнике меньше, чем в непроводящей среде с тем же значением ε (при одинаковых магнитных проницаемостях), т.е. наличие в среде проводимости уменьшает фазовую скорость.

Длина волны в проводящей среде равна

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \left\{ \frac{2}{\left[1 + (\sigma/\omega\varepsilon)^2\right]^{1/2} + 1} \right\}^{1/2}, \quad (9.1.10)$$

т.е. уменьшается по сравнению с длиной волны в непроводящей среде с теми же значениями диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями.

Комплексное волновое число целесообразно представить в виде

$$\tilde{k}(\omega) = k(\omega)\exp(i\varphi), \quad k(\omega) = \sqrt{k^2 + s^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{s}{k}. \quad (9.1.11)$$

Можно показать, что величина φ определяет сдвиг по фазе между колебаниями векторов E и B в проводящей среде. Напомним, что коэффициент отражения R и коэффициент пропускания T можно определить как отношение нормальных компонент усреднённого по времени вектора Пойнтинга \bar{S} соответствующих волн. При учёте поглощения энергии в средах, формулируя закон сохранения энергии в некотором объёме, следует принять во внимание уменьшение потоков энергии в падающей, отражённой и проходящих волнах. При этом коэффициенты пропускания T , R , A удовлетворяют соотношению

$$T + R + A = 1 \quad (9.1.12)$$

(A – поглощательная способность вещества).

Рассмотрим подробнее процессы поглощения и отражения излучения от металла, используя представление о комплексном показателе преломления

$$\tilde{n} = \frac{\tilde{k}c}{\omega} = n - ik_p. \quad (9.1.13)$$

Через коэффициент экстинкции k_p может быть выражена величина z , которая определяет глубину проникновения света в металл, т.е. глубину на которой интенсивность электромагнитной волны уменьшается в e раз:

$$z = \lambda_0 / (4\pi k_p). \quad (9.1.14)$$

Для металлов k_p в видимой области спектра обычно порядка единицы. Например, для золота при нормальном падении электромагнитной волны на поверхность $k_p = 2.82$, $z = \lambda_0 / (4\pi k_p) = \lambda_0 / 35.4$. Таким образом, на протяжении длины волны интенсивность света в золоте убывает в

$\exp(35,4) = 2 \cdot 10^{15}$ раз. Очевидно, что плёнки металлов с толщиной порядка длины волны, как правило, уже практически не прозрачны для света.

Теперь свяжем оптические константы металлов n , k_p с их электрическими постоянными σ , ε . Из (2.6) с учётом того, что $n = \sqrt{\varepsilon}$ имеем

$$\tilde{n}^2 = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega} = (n - ik_p)^2. \quad (9.1.15)$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим искомую связь оптических констант металла n и k_p с его электрическими характеристиками σ и ε .

$$\begin{aligned} n^2 k_p^2 &= \varepsilon, \\ 2k_p n &= \frac{\sigma}{\omega}. \end{aligned} \quad (9.1.16)$$

В случае идеального проводника $k_p \gg n$, $R = 1$ – вся энергия электромагнитной волны отражается от поверхности металла.

Следует отметить, что отражённые и поглощённые электромагнитные волны формируются не на границе раздела, а в веществе. При этом для непрозрачных твёрдых тел доля падающего монохроматического излучения, поглощённого телом, определяется его поглощательной способностью (в случае нормального падения)

$$A = 1 - R = \frac{4n}{(n+1)^2 + k_p^2}, \quad (9.1.17)$$

т.е. A также можно вычислить по данным измерений оптических постоянных или комплексного показателя преломления.

Из формулы (17) следует выражение для R

$$R = \frac{(n-1)^2 + k_p^2}{(n+1)^2 + k_p^2}. \quad (9.1.18)$$

При получении формул (17–16) использовалась известная формула Френеля для коэффициента отражения от диэлектрика, в которой действительный показатель преломления заменялся на комплексный.

Формулы (17) и (18) являются приближенными, так как получены в предположении, что все электроны в металлах являются свободными. Это приводит к значительному расхождению теоретических зависимостей $R(\lambda)$ и $A(\lambda)$ от экспериментальных данных (см. рис. 9.1). Теоретическое описание экспериментальных данных можно улучшить, если учесть взаимодействие излучения (прежде всего коротковолнового) со связанными электронами. Этот учёт в общем случае может быть корректно проведён лишь с учётом ряда дополнительных квантовомеханических эффектов, включающих внутренний фотоэффект. Однако подробное освещение и анализ этих эффектов выходят за рамки данного пособия.

Поглощение света электронами повышает их энергию. Часть поглощённой энергии электроны передают при столкновении другим электронам, ионам решётки и дефектам кристаллической решётки (дислокациям, границам зёрен и т.д.). Эффективность столкновений, величина которой определяет разогрев металла, будет зависеть от частиц, между которыми происходит

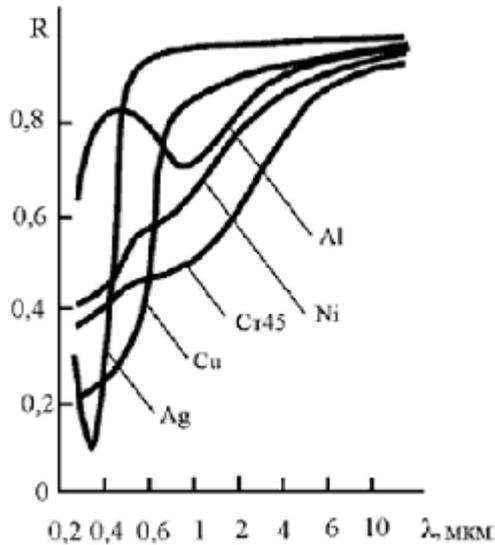


Рис. 9.1. Зависимость коэффициента отражения R от длины волны λ для разных металлов.

обмен энергией. При этом $\nu_{ee} > \nu_{ei} > \nu_{ep}$, где ν_{ee} – частота столкновений электрон – электрон, ν_{ep} – частота столкновений электронов с примесями и дефектами в металле, ν_{ei} – частота столкновений электронов с фонами, которые рождаются в металле при движении свободных электронов, скорость которых выше, чем скорость звука в металле. Фононы представляют собой акустические волны, которые и передают энергию электронов решётке. Такой механизм вполне реален, т.к. электрону, получившему избыток тепловой энергии вследствие поглощения кванта света, часто недостаточно одного столкновения для передачи избыточной энергии, т.е. процесс релаксации энергии в общем случае многостадийный, и, следовательно, носит диффузионный характер. По этой причине перераспределение энергии происходит не в скин-слое ($\delta = 10^{-8}$ м), а в слое l_α

$$l_\alpha = \sqrt{D/\nu_{ee}} = 10^{-7} \text{ м}, \quad (9.1.19)$$

где D – коэффициент диффузии электронов. При этом происходит нагрев металла. Далее тепло, поглощённое в слое l_α , механизмами теплопроводности передаётся вглубь материала. Характерные времена передачи поглощённой энергии металлу

$$\tau = \frac{1}{\nu_{ei}} = 10^{-12} \div 10^{-11} \text{ с.}$$

§ 9.2. Механизм поглощения света и передачи энергии в полупроводниках

В случае полупроводников процесс поглощения света более сложен, чем в металлах. В полупроводниках, имеющих при комнатной температуре незначительную концентрацию свободных электронов, поглощение света определяется, в основном, связанными электронами (имеются в виду собственные полупроводники). Сильно поглощать излучение на частоте ω будут лишь те полупроводники, для которых энергия кванта $\hbar\omega$ больше ширины запрещённой зоны E_g .

Зависимости оптических характеристик полупроводников от длины волны имеют сложный характер, что связано со сменой механизмов поглощения при изменении длины волны. На рис. 9.2 в качестве примера приведены экспериментальные спектры отражения и поглощения кремния. Из него следует, что в кристалле *Si* поглощение света с длиной волны $\lambda > 1$ мкм мало, хотя коэффициент отражения достаточно велик. При $\lambda < 1$ мкм поглощение в кристаллическом кремнии резко возрастает. В ближнем ультрафиолетовом диапазоне при условии $\omega > \omega_p$ значение R и k_p снова падает, как и в металлах.

Ниже мы ограничимся рассмотрением случая, когда $\hbar\omega > E_g$ и обеспечиваются условия сильного поглощения – поглощающие полупроводники.

У всех полупроводников, включая кремний (рис. 9.2), существует широкая спектральная область интенсивного поглощения, ограниченная со стороны длинных волн резким краем. Это обусловлено тем, что поглощение фотонов с достаточно большой энергией сопровождается переходами электронов из валентной зоны в зону проводимости. Свет же с частотой $\omega < E_g/\hbar$ проходит сквозь собственный (не содержащий примесей) полупроводник, не вызывая фотоионизации. Возрастание коэффициента поглощения для фотонов с энергиями $\hbar\omega > E_g$, позволяет оценить значение ширины запрещённой зоны.

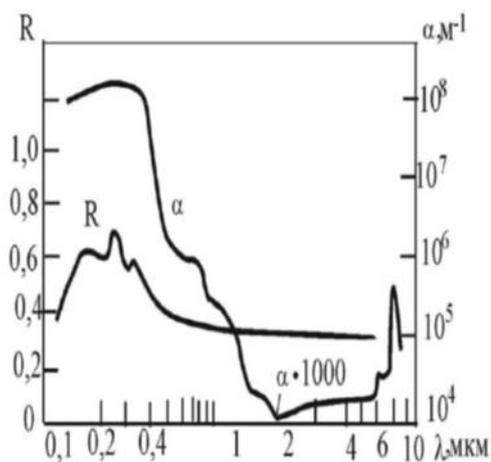


Рис. 9.2. Экспериментальные зависимости коэффициентов отражения $R(\lambda)$ и поглощения $\alpha(\lambda)$ для кристаллического кремния.

лах типа *PbS*.

Наличие полос поглощения (селективного поглощения) вблизи края основной полосы объясняют существованием экситонного механизма поглощения света. Экситон можно представить себе как возбуждённое состояние, переходящее от одной ячейки кристалла к другой, или как систему, состоящую из электрона и положительной дырки, напоминающую атом водорода. Для образования экситона необходима меньшая энергия, чем для генерации пары свободных носителей – электрона и дырки.

Следует отметить, что ширина запрещённой зоны полупроводников уменьшается с ростом температуры. Это происходит, в первую очередь, из-за температурного изменения размеров элементарной ячейки кристалла. На основе представлений квантовой теории о возникновении зон разрешённой энергии из атомных уровней при сближении атомов удаётся качественно объяснить как сужение запрещённой зоны при возрастании температуры, характерное для большинства полупроводников, так и обратный эффект, имеющий место, например, в кристал-

Экситон может окончить своё существование либо в результате теплового «довозбуждения», т.е. термической диссоциации, сопровождающейся возникновением электрона и дырки, либо отдавая свою энергию решётке. Возможно также исчезновение экситона с испусканием фотона. Этот процесс является своеобразным случаем излучательной рекомбинации неравновесных носителей.

Неселективное поглощение излучения свободными электронами, отчётливо наблюдаемое в широкой длинноволновой области спектра ($\hbar\omega < E_g$), обусловлено переходами электронов внутри одной зоны, например зоны проводимости (часто это поглощение называют «поглощением свободными носителями»). Коэффициент поглощения в этом случае приблизительно пропорционален концентрации свободных носителей. Как правило, их концентрация незначительна, по порядку величины она составляет $\sim \exp(-2E_g/kT)$ от концентрации электронов, участвующих в процессе собственного поглощения. Вследствие экспоненциальной зависимости количества электронов проводимости от температуры поглощение этого типа резко возрастает при увеличении температуры.

В действительности, для носителей в совершенной периодической решётке, не возмущённой тепловым движением, в соответствии с законом сохранения импульса переходы в одной зоне являются запрещёнными. Однако тепловые колебания и структурные нарушения, с которыми могут взаимодействовать носители тока, обуславливают возможность переходов внутри зоны.

Используя подход аналогичный применённому для расчёта коэффициента поглощения свободными электронами в металле, можно показать, что

$$\alpha \sim \lambda^2. \quad (9.2.1)$$

Если учитывать взаимодействие электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне с решёткой, а также влияние примесей и дефектов, то

$$\alpha \sim \lambda^{3/2}. \quad (9.2.2)$$

В случае очень высоких концентраций ионизованных примесных центров коэффициент поглощения α должен зависеть от длины волны, как $\lambda^{7/2}$; при этой длине волны коэффициент поглощения должен быть пропорционален квадрату концентрации примесных центров.

Анализ явлений захвата и рекомбинации носителей, связанных с локальными центрами и дефектами, удобно провести на основании схемы соответствующих электронных переходов, приведённой на рис. 9.3. Переходы 1, 2 и 3 (рис. 9.3,а) соответствуют поглощению света: в основной полосе – 1 и локализованными примесями – 2, 3. В случае 1 возникает пара свободных носителей, в случае 2 – свободный электрон и связанная (локализованная) дырка, в случае 3 – свободная дырка и связанный электрон. Электронные переходы, соответствующие возникновению экситонов или возбуждённых примесных центров, а также внутризонные переходы не указаны, так как они не сопровождаются появлением свободных носителей.

Возникшие в результате фотоионизации неравновесные электроны и дырки существуют до тех пор, пока они не будут захвачены примесными центрами. Этот процесс обычно является более вероятным, чем непосредственная рекомбинация или образование экситона. Центры, способные захватывать свободные носители (ловушки), разделяют на: центры прилипания

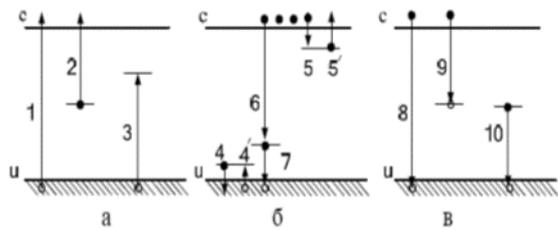


Рис. 9.3. Электронные переходы в полупроводнике с локальными центрами: а – фотоионизация, б – захват носителей, в – рекомбинация.

(в случае, если захваченный носитель имеет большую вероятность обратного термического возбуждения в свободное состояние по сравнению с вероятностью рекомбинации на центре с носителем противоположного знака), и рекомбинационные центры (если наиболее вероятной для захваченного носителя является рекомбинация с носителем противоположного знака).

Вообще говоря, центр с энергетическим уровнем вблизи одной из зон обычно действует как центр прилипания, а центр с уровнем вблизи середины запрещённой полосы – как рекомбинационный центр. Различие между центрами прилипания и рекомбинационными центрами определяется соотношением вероятностей термического освобождения и рекомбинации.

Переходы 4 и 4' и 5 и 5' на рис. 9.3,б обозначают захват и термическое освобождение носителей; переход 6 соответствует захвату электрона рекомбинационным центром, а электронный переход 7 – захвату дырки.

При одной температуре или уровне возбуждения центр может действовать в качестве центра прилипания, а при других условиях – в качестве центра рекомбинации.

На схеме рис. 9.3,в обозначены три основных электронных перехода, соответствующих рекомбинации: во-первых, свободный электрон может непосредственно рекомбинировать со свободной дыркой (переход 8). Переходы этого типа обычно являются излучательными, т.е. освобождающаяся энергия излучается в виде фотона с энергией, примерно равной ширине запрещённой зоны. Вероятность непосредственной рекомбинации обычно очень мала и не определяет средних значений времени жизни неравновесных носителей.

Более вероятным процессам рекомбинации соответствуют переходы типа 9, т.е. захват электрона центром, вблизи которого находится связанная с ним дырка, или типа 10, т.е. захват дырки центром, вблизи которого локализован электрон. Эти переходы также могут быть излучательными.

Таким образом, возвращение электронной системы кристалла из возбуждённого состояния в равновесное может сопровождаться люминесценцией (которую называют также «рекомбинационным излучением» полупроводников). Вероятность, т.е. «скорость» рекомбинации в значительной мере определяется тем, каким способом преобразуется энергия возбуждённых (неравновесных) носителей. Возможны различные процессы преобразования или рассеяния энергии неравновесных носителей, в том числе: испускание

света (фотонов); передача энергии возбуждения кристаллической решётке, т.е. испускание фононов; передача избытка энергии двух рекомбинирующих носителей третьему носителю, т.е. процесс, обратный ударной ионизации. Этот процесс называют «ударной рекомбинацией» или эффектом Оже.

Разумеется, возможны и комбинации двух процессов передачи энергии, например испускание фотона и одновременное возбуждение фононов. В случае, когда возникает несколько фононов, они могут появляться либо одновременно, либо последовательно (каскадом) по мере того, как захватываемый локальным центром носитель приближается к центру, а затем движется вблизи центра, то, испуская, то, поглощая фононы до тех пор, пока не произойдёт захват или пока носитель не удалится вновь от центра.

Глава 10. Взаимодействие с веществом сверхсильных электромагнитных полей

Создание импульсных лазерных систем фемтосекундного диапазона, способных генерировать мощности более тераватта ($1 \text{ ТВт} = 10^{12} \text{ Вт}$), и проектирование установок петаваттного диапазона ($1 \text{ ПВт} = 10^{15} \text{ Вт}$) открывает совершенно новые, ранее недоступные возможности для исследования взаимодействия излучения с веществом.

Фокусировка излучения фемтосекундных импульсов приводит к сверхвысокой интенсивности и к сверхсильным электромагнитным полям. Прохождение их в веществе приводит к новым режимам взаимодействия лазерного излучения с этим веществом. Очевидно, что при этом речь идёт, главным образом, о взаимодействии с плазмой, поскольку напряжённость электрического поля в световой волне превосходит ту, что удерживает электроны в атоме.

Особенности режима взаимодействия обусловлены следующими обстоятельствами. Прежде всего, это сама по себе длительность взаимодействия (менее 100 фс), которая короче любых гидродинамических движений плазмы. Второе — огромные электрические и магнитные поля. При интенсивностях 10^{21} Вт/см^2 , достижимых в настоящее время, напряжённость электрического поля достигает 10^{12} В/см , что более чем в 100 раз превышает атомное поле ($5 \times 10^9 \text{ В/см}$ — величина кулоновского поля в модели Бора атома водорода). Третье — гигантская плотность энергии, достигающая $3 \times 10^{10} \text{ Дж/см}^3$, чему соответствует температура чёрного тела в 100 миллионов градусов. Это величины, характерные для ядерного взрыва. Наконец, скорости электрона в таком сильном поле могут приближаться к скорости света, что радикально меняет характер взаимодействия электромагнитной волны с электронами. Ниже будут рассмотрены некоторые важные эффекты, проявляющиеся при взаимодействии сверхмощных световых пучков с атомами и элементарными частицами.

В классической оптике при взаимодействии света с веществом электроны при своих колебаниях в электрическом поле электромагнитной волны приобретают скорости существенно меньшие по сравнению со скоростью света, и их движение подчиняется законам классической механики (масса не

зависит от скорости). При высоких интенсивностях ситуация иная. Масса электрона m , движущегося со скоростью V , изменяется согласно формуле $m = \gamma m_0$, где m_0 — масса покоя электрона, а γ — т.н. лоренцовый фактор, $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$.

Как известно, на заряд, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца: $\vec{F} = \frac{e}{c} [\vec{V} \times \vec{H}]$, где \vec{H} - напряжённость магнитного поля. В класси-

ческой оптике эта сила практически не проявляется, т. к. скорости электронов в электрическом поле световой волны много меньше c . Но при высоких интенсивностях эта сила начинает проявляться, и электрон уже совершает не только колебательное движение вдоль вектора электрического поля, но и приобретает движение вдоль распространения световой волны. Таким образом, возникает новый режим взаимодействия света с веществом, известным как релятивистская оптика. Этот режим приводит к некоторым важным применениям лазеров, генерирующих ультракороткие, сверхмощные импульсы.

Одним из способов использования релятивистской силы сверхинтенсивного лазерного излучения является ускорение электронов. На этом эффекте могут быть основаны принципиально новые схемы ускорителей электронов.

Возможность получения с помощью ультракоротких импульсов электронов с релятивистскими энергиями при интенсивности лазера $I \geq 10^{20}$ Вт/см² позволяет надеяться на то, что их взаимодействие с ядрами может привести к кулоновскому возбуждению ядерных состояний, а при превышении пороговых энергий – и к электроядерным реакциям.

Когда интенсивное излучение в виде ультракоротких импульсов фокусируется в газовую среду (благородные газы), электронный отклик среды становится сильно нелинейным. В результате могут генерироваться гармоники высокого порядка с длинами волн, простирающимися в вакуумную ультрафиолетовую область. По причине симметрии (газ — центросимметричная среда) генерируются только нечётные гармоники основной частоты. Спектр этих гармоник, как показали исследования, имеет специфический вид. Интенсивности от 3-й до 7-й или 9-й гармоник уменьшаются на два-три порядка. А за ними следует область длин волн (плато), простирающаяся до гармоник порядка двух-трех сотен, с приблизительно равной интенсивностью. Эта область заканчивается резким обрывом на длине волны мягкого рентгеновского диапазона. Оказалось, что излучение на краю плато сосредоточено в чрезвычайно коротких импульсах.

Сверхвысокая интенсивность лазерного излучения качественно меняет характер нелинейной поляризации вещества. Происходит не просто деформация электронных оболочек атома, но отрыв электронов (ионизация) с последующим возвращением электрона в ион с восстановлением атома (рекомбинация) и с испусканием фотона. Поскольку возвращающийся электрон обладает очень высокой кинетической энергией, то при его соударении с ионом получается квант жёсткого излучения, максимальная энергия которого равна

энергии электрона (подобно тому, как это получается в рентгеновской трубке).

В объёме, где интенсивность света достаточно велика (область фокуса) находится много атомов, и с каждым из них такой процесс будет происходить синхронно с изменением поля в световой волне. Таким образом, световая волна лазера фазирует испускание квантов излучения многими атомами. В результате происходит когерентное испускание целого набора линий коротковолнового излучения в виде нечётных (условие симметрии при нелинейном взаимодействии с изотропной средой) гармоник излучения лазера, причём номер гармоники может приближаться к трём сотням (высшие гармоники).

В одном из экспериментов, в котором исследовался вышеописанный процесс, использовалось лазерное излучение со следующими параметрами: длина волны 800 нм, энергия импульса 20 мДж, длительность импульса 26 фс. Оно фокусировалось в струю гелия, вытекающую в вакуум. В результате получалось излучение в виде набора высших гармоник, причём минимальная длина волны излучения составляла 2,7 нм. Поскольку процесс испускания коротковолнового излучения происходит за времена долей периода лазерной волны, продолжительность испускания излучения может составлять менее 1 фс. Тем самым, открывается возможность получения излучения в виде импульсов аттосекундной длительности. Следует заметить, что вероятность возвращения электрона и столкновения с родительским атомом невелика, поэтому и мала эффективность генерации такого коротковолнового излучения. Обычно самое коротковолновое излучение состоит из десятков-сотен квантов на импульс. Тем не менее, современная техника позволяет уверенно регистрировать такие импульсы и даже измерять их длительность корреляционными методами, используя контролируемые задержки лазерного импульса и испускаемого излучения. Например, в диапазоне 13,0–14,2 нм была измерена длительность 200 ас. Таким образом, совершенствование лазеров позволило получать импульсы электромагнитных волн уже в аттосекундном диапазоне длительности импульса, с длиной волны на границе вакуумного ультрафиолета и рентгеновского излучения.

Импульсы излучения с ещё меньшей длиной волны (жёсткое рентгеновское) можно получить при взаимодействии фемтосекундных импульсов с ускоренными электронами. При взаимодействии света с пучками ускоренных электронов можно получить излучение с короткой длиной волны. Современные ускорители позволяют получать электроны с энергией до 50 ГэВ. Это т.н. ультрарелятивистские электроны, движущиеся со скоростью V , близкой к скорости света c . Согласно теории относительности энергия электрона с массой m_0 составляет $E = m_0 c^2 / (1 - V^2/c^2)^{1/2}$. Ультрарелятивистские электроны обладают энергией, много большей энергии покоя электрона $m_0 c^2 = 0,5$ МэВ.

При передаче импульса ультрарелятивистского электрона рассеянному фотону, он приобретает энергию в десятки ГэВ, превращаясь в γ -кванты. В ускорителях получают сгустки электронов, т.н. «банчи». Если на такой сгусток сфокусировать лазерный пучок и обеспечить совпадение в простран-

стве и во времени, то фотоны, рассеянные электронами в направлении своего движения, превратятся в γ -кванты с энергией в десятки ГэВ. Число таких квантов зависит от числа лазерных квантов, которые испытали взаимодействие с электронами. Поэтому требуется УКИ с достаточно большой энергией (несколько мДж). Такой эксперимент был осуществлён американскими учёными на уникальном ускорителе электронов (SLAC Stanford Linear Accelerator Center), который позволяет получать электроны до энергии 50 ГэВ. Этот эксперимент продемонстрировал возможность получения направленных пучков γ -излучения с энергиями до 30 ГэВ. Это излучение может быть с успехом использовано в ядерной физике, поскольку способно приводить к фотовозбуждению ядер и фотоядерным реакциям.

Другим важным примером использования сверхмощного лазерного излучения в ядерной физике является возможность нагрева плазмы до термоядерных температур, что позволит решить проблему управляемого термоядерного синтеза.

Внешнее электрическое поле начинает существенно влиять на состояние и процессы превращения микрочастиц, когда плотность потока энергии превышает некоторое критическое значение I_∞ . Это значение определяется из условия равенства работы, производимой этим полем на комптоновской длине волны электрона $\lambda_c = \hbar/m_e c \approx 10^{-10}$ см, его энергии покоя $m_e c^2$. Отсюда $I_\infty = m_e^2 c^3 / e\hbar \approx 10^{16}$ В/см и соответствующая плотность потока энергии $I_\infty \approx 10^{30}$ Вт/см². Очевидно, что такие плотности потока энергии недостижимы при помощи лазеров, по крайней мере в обозримом будущем. Одним из процессов, которые могут произойти в таком поле, является распад фотона с образованием электрон-позитронной пары («пробой» физического вакуума).

Образование электрон-позитронных пар предполагается наблюдать в результате взаимодействия нескольких лазерных фотонов с энергичным рассеянным фотоном. Аналогичные эксперименты могут привести и к обнаружению «рассеяния света на свете». Из других ожидаемых эффектов упомянем поляризацию вакуума и возможное уменьшение массы покоя электрона в сильном световом поле.

Примечания

Примечание I.

Входящая в (1.1.1) функция φ_k удовлетворяет условию нормировки

$$\int \varphi_k^* \varphi_k dq = 1. \quad (1.1.1a)$$

В обозначении Дирака (1.1.1) и (1.1.1a) имеют вид

$$\hat{H}_0 |\varphi_k\rangle = E_k |\varphi_k\rangle; \quad \langle \varphi_k | \varphi_k \rangle = 1 \quad (1.1.1б)$$

Если \hat{A} – некоторый оператор, то в тех же обозначениях

$$\int \varphi_m^* \hat{A} \varphi_k dq = \langle \varphi_m | \hat{A} | \varphi_k \rangle. \quad (1.1.1в)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться сокращённой формой записи:

$$\langle \varphi_m | \hat{A} | \varphi_k \rangle = \langle m | \hat{A} | k \rangle. \quad (1.1.1г)$$

Примечание II.

Какой бы подход ни использовался при решении уравнения (1.2.11) извлечь из него конкретные физические результаты можно, рассчитав соответствующие матричные элементы. Их расчёт может быть осуществлён двумя способами. Первый способ (квазиклассический) использует классическое описание электромагнитного поля и квантовое описание частиц вещества, второй - основан на операции вторичного квантования и является полностью квантовомеханическим. При описании процессов взаимодействия поля световой волны с веществом мы будем преимущественно пользоваться квазиклассическим описанием. Лишь в пятой главе оптические явления, сопровождающие взаимодействие излучения с веществом, будут рассмотрены на основе последовательного квантовомеханического подхода.

Список основной литературы

1. Тарасов Л.В. Физические основы квантовой электроники. – М.: Советское радио, 1976.
2. Клышко Д.Н. Физические основы квантовой электроники. – М.: Наука, 1986.
3. Акулин В.М., Карлов Н.В. Интенсивные резонансные взаимодействия в квантовой электронике. – М.: Наука, 1987.
4. Пантел Р., Путхоф. Основы квантовой электроники. – М.: Мир, 1972.
5. Мейтленд А., Данн М. Введение в физику лазеров. – М.: Наука, 1978.
6. Киселев Г.Л. Приборы квантовой электроники. – М.: Высшая школа, 1980.
7. Годжаев Н.М. Оптика. - М.: Высш. шк., 1977.
8. Матвеев А.Н. Оптика. М.: Высш. шк., 1985.
9. Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики Т.П. – М.: Из-во физ.-мат. литературы, 1962.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М, Теоретическая физика. Т. Ш – М.: Из-во физ.-мат. литературы, 1963.
11. Лоудон Р. Квантовая теория света. – М.: Мир, 1976.
12. Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Атом в сильном световом поле. – М.: Энергоатомиздат, 1984.
13. Делоне Н.Б. Взаимодействие лазерного излучения с веществом. – М.: Наука, 1989.
14. Коротеев Н.И., Шумай И.Л. Физика мощного лазерного излучения. – М.: Наука, 1991.
15. Либенсон М.Н., Яковлев Е.Б., Шандыбина Г.Д. Взаимодействие лазерного излучения с веществом (силовая оптика). Конспект лекций. Часть I. Механизмы поглощения и диссипации энергии в веществе, под общей редакцией Вейко В.П. – СПб: СПб ГУ ИТМО, 2005.
16. Либенсон М.Н., Яковлев Е.Б., Шандыбина Г.Д. Взаимодействие лазерного излучения с веществом (силовая оптика). Конспект лекций. Часть I. Поглощение лазерного излучения в веществе. Под общей редакцией В.П. Вейко – СПб: СПб ГУ ИТМО, 2008.
17. Крюков П.Г. Фемтосекундные импульсы. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2008.

Список дополнительной литературы

- 1Д. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. – М.: ИЛ, 1956.
- 2Д. Королев Ф.А. Теоретическая оптика. – М.: Высшая школа, 1966.
- 3Д. Бертен Ф. Основы квантовой электроники. – М.: Мир, 1971.
- 4Д. Файн В.М. Фотоны и нелинейные среды. – М.: Советское радио, 1972.
- 5Д. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. – М.: Мир, 1978.
- 6Д. Акулин В.М. Динамика сложных квантовых систем. - М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. – 496 с.