Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

С.Б. Рыжиков, Ю.В. Рыжикова

КАК БЫЛА ПРОЛОЖЕНА ДОРОГА В МИР ФИЗИКИ

ЧАСТЬ 1
ОТ ФАЛЕСА ДО АРХИМЕДА

Издание 2-е

Москва
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
2025

УДК 374
ББК 72.3
Р 93

Р ы ж и к о в С. Б., Р ы ж и к о в а Ю. В. **Как была проложена дорога в мир физики. Часть 1. От Фалеса до Архимеда**. Учебное пособие. Издание 2-е. – М.: Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, 2025. – 160 с.
ISBN 978-5-8279-0351-2

В книге простым и понятным для школьников языком излагается материал по физике, соответствующий программе 7-го класса. Авторы стремятся восстановить исторический фон открытия законов, изучаемых в 7-м классе, и ответить на вопросы: каким образом были совершены эти открытия, какие проблемы стремились решить учёные и как им это удалось? В Приложении даются начальные сведения о возможности решения задач численными методами.
Книга адресована ученикам 6-го–11-го классов, учителям и всем, интересующимся физикой.

Научный редактор: *Грязнов А.Ю.,* к.ф.н., МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет
Рецензенты:
Вятчанин С.П., д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой физики колебаний, МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет;
Шаронова Н.В., д.п.н., профессор, МПГУ, кафедра теории и методики обучения физике им. А.В. Пёрышкина.

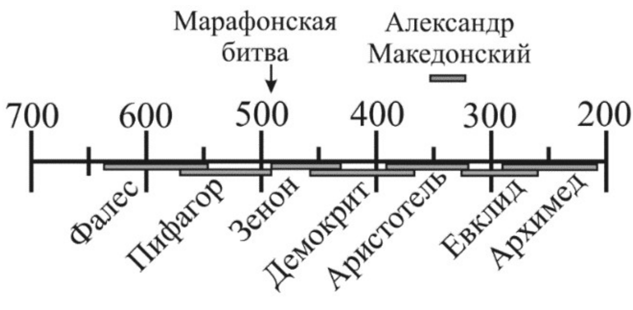
Подписано в печать 18.09.2025 г.
Формат А5. Объем 10 п.л. Тираж 70 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Отпечатано в отделе оперативной печати
Физического факультета

ISBN 978-5-8279-0351-2

Содержание



Ось времени (г. до н. э.)

Предисловие

В школьном курсе физики редко упоминаются даты открытия законов. На то есть причины. Во-первых, известна «любовь» школьников к запоминанию дат, мало им проблем на уроках истории, зачем ещё «лишние» труды на уроках физики? Во-вторых, физика оперирует объективными законами. Когда мы говорим: закон Архимеда, закон Кулона, законы Ньютона, мы всего лишь отдаём дань уважения первооткрывателям этих законов. Но законы не зависит от того, кто их открыл, поэтому вместо: «законы Ньютона» мы могли бы просто говорить: «законы движения». Собственно, Ньютон их так и называл, он же не знал, что потом их назовут законами Ньютона. Законы также не зависят от того, когда их открыли, поэтому возникает вопрос: полезно ли помнить, когда Ньютон представил научному сообществу свои труды – сто лет назад, двести или триста? Запомнить законы физики, научиться использовать их для решения задач – это уже не лёгкий труд. Зачем ещё тратить силы на воссоздание исторических подмостков?

Действительно, если цель ученика выучить формулировку закона, ответить её на уроке, получить свою «пятёрку» и… забыть, как наш мозг забывает любую ненужную информацию, то изучение истории открытия закона – это лишние заботы. Но, отбросив историю, мы потеряем ответ на очень важный вопрос: «каким образом делаются открытия?» Почему Ньютону ещё в студенческом возрасте вдруг захотелось перевернуть физику Аристотеля и построить что-то новое? Никому вокруг не хотелось посягнуть на 2000-летний авторитет Аристотеля, а Ньютон поставил себе такую цель – и достиг, хотя на написание главной книги своей жизни у Ньютона

Исаак Ньютон
(1643 – 1727)

ушло около двадцати лет! Или зачем Фарадею нужно было открывать закон электромагнитной индукции, изготавливать десятки метров проволоки, наматывать их на катушку, изолировать шёлковой нитью, да ещё делать это не раз и не два, не зная, получится что-то или нет? Да и как ему вообще пришла в голову идея, что нужна катушка? Известно о многих неудачных опытах Фарадея, но он всё же упорно шёл к цели.

Если читатель – творческая личность (а авторы уверены, что творческая искра есть в каждом *Homo sapiens*[1]), и он мечтает создавать новое, то, несомненно, ему полезно знать о путях к открытиям, по которым прошли десятки выдающихся учёных всех времён и народов.

Авторы полагают, что многим нравится читать детективные романы, но читать детективы «с конца» неинтересно. Возможно, читателям нравилось следить за тем, как Шерлоку Холмсу и доктору Ватсону удавалось распутывать хитроумные запутанные преступления. Но если читателям просто представить полицейский отчёт, что инспектор Лестрейд раскрыл вблизи имения Баскервилей преступление – покушение на убийство с помощью большой собаки, то кто стал бы читать всё остальное? А ведь учебник по физике написан именно так! На страницах мы видим сухие формулировки законов, которые сложно запомнить, а ещё сложнее понять, но от нас скрыты годы упорных поисков.

Кадр из фильма «Приключения Шерлока Холмса и доктора Ватсона»

Авторы считают, что научное исследование не менее занимательно, чем распутывание детективных историй. И авторы надеются, что многие читатели в будущем сами займутся научным поиском. Но как научиться делать открытия, если в учебнике нет

[1] Человек разумный (латынь)

истории открытий, а нам представлена лишь последняя страничка детективного романа? Поэтому в книге будут представлены не только сами законы, но и причины, побудившие учёных взяться за проблему, а также обрисован, насколько это возможно, ход их мыслей.

Есть ещё и вторая причина, почему важно знать историю открытий законов. С высоты современной науки видно, что законы физики время от времени пересматриваются. Трудами Кеплера, Галилея, Ньютона и др. учёных в XVII веке была отвергнута античная система мира и создана классическая или ньютоновская физика. На рубеже XIX и XX веков на смену классической физики пришли квантовая и релятивистская теории. Это не значит, что классическая физика неверна, мы ею по-прежнему пользуемся, но в определённых границах. Но, чтобы отказаться от старых привычных законов от учёных требовалось большое мужество, а главное – понимание, как они были открыты и что легло в основание старых законов. Если бы Эйнштейн считал законы Ньютона неизменными аксиомами, то смог ли он создать теорию относительности? Конечно, не все читатели станут Эйнштейнами, но ведь никто не может заранее сказать кто каких достигнет высот.

К сожалению, изучение физики как детектива занимает много времени, гораздо больше, чем просто заучивание сухих формулировок законов. Поэтому мы рассмотрим в историческом аспекте лишь часть законов. Важно, что эта книга не является учебником истории – для нас важна не столько историческая хронология событий, сколько логика развития науки, как открытия одних законов приводили к поиску новых. В некоторых местах мы будем забегать по времени вперёд, а затем возвращаться назад. Особое внимание в книге будет уделено обоснованности физических теорий, то есть, какие эксперименты легли в основу тех или иных положений.

Глава 1. Зарождение науки

Когда и как зародилась наука? Как зародилась физика? Чтобы разобраться с этими вопросами, нужно определиться с тем, что называть наукой и что называть физикой.

Можно взять определение термина «наука» из энциклопедии, но определения из энциклопедии не всегда удобны для понимания. Поставим сначала вопрос: для чего вообще даются определения? Очевидно, чтобы отличать одни понятия от других. Наука направлена на познание мира. Какие ещё существуют способы познания мира? Искусство, магия, религия, просто повседневный опыт. Чем наука отличается от них?

От искусства наука отличается *объективностью*. В искусстве каждое произведение имеет автора, будь то картина, поэма, музыкальное произведение и т.д. (фольклор тоже имеет определённые географические корни). Научный закон не зависит от того, кто его открыл. Многие законы физики традиционно указываются без автора, например, «основное уравнение молекулярно-кинетической теории», «золотое правило механики», «закон сохранения энергии» и т.п. В физике известны случаи, когда законы открывались независимо разными людьми. Например, закон Кулона первым открыл Кавендиш, но не посчитал нужным опубликовать своё открытие, и об этом узнали много лет спустя из его рукописей. Закон электромагнитной индукции почти одновременно открыли Джозеф Генри и Майкл Фарадей, но Фарадей опубликовал открытие (1831), а Генри посчитал, что открытие не имеет практической пользы, и не стал его публиковать. Понятно, что в искусстве совпадений не бывает: два автора не могут независимо друг от друга написать одинаковую повесть или музыку.

Чем наука отличается от магии? Очень хорошо об этом написал нобелевский лауреат по физике Ричард Фейнман (1918 – 1988). Во время II мировой войны американцы на многих островах Тихого океана обустроили авиабазы, которые после войны перестали использоваться за ненадобностью. Однако аборигены этих островов очень сожалели, что самолёты с «очень полезными вещами» перестали прилетать. Тогда они решили их «приманивать». Они воссоздали внешний вид аэродромов, сделали будки, и «диспетчеры» сидели в этих будках с деревянными наушниками и ожидали, что теперь самолёты точно прилетят. Фейнман назвал этих людей «самолётопоклонниками». Отличие научного метода исследования мира от магии, заключает Фейнман, состоит в том, что наука имеет объективный способ проверки правильности гипотез. «Самолётопоклонники» могли убедиться в том, что все их «хитрости» с деревянными наушниками не работают – самолёты не приземляются. Наука вообще и физика, в частности, опирается не на уверенность в существование неведомых сил, которые могут решить сложную ситуацию, а только на результаты эксперимента.

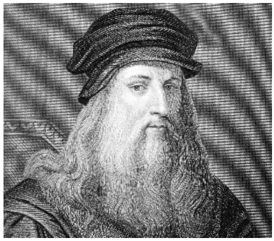
Чем наука отличается от религии? В религии существуют истины, которые невозможно доказать и которые являются предметом Веры. Для науки нет незыблемых аксиом. В физике критерием истины является эксперимент. Если экспериментальные данные не соответствуют ожиданием теории, то приходится пересматривать теоретические положения. Подобные пересмотры теории не раз наблюдались в истории физики.

Чем наука отличается от нашего повседневного жизненного опыта? Как мы увидим позже, на первом этапе развития науки простые наблюдения за природными явлениями были важной составляющей накопленных научных фактов. Однако в дальнейшем в науке поиск новых данных происходил целенаправленно с использованием разработанных систем получения информации: возникали новые теории и ставились новые эксперименты для проверки этих теорий.

Таким образом, отличительной чертой науки является наличие объективных данных, целенаправленного поиска новых данных и объективного способа проверки правильности полученных данных. Теперь можно дать определение науки из философского словаря.

Наука – особый вид познавательной деятельности, направленной на выработку объективных и обоснованных знаний о мире.

Как видно, в этом определении коротко, в двух строчках, собраны высказанные выше соображения.



Леонардо да Винчи
(1452 – 1519)

Важно отметить, что разные подходы к познанию мира не противоречат друг другу. Многие учёные оставили свой след в искусстве. Мы знаем Леонардо да Винчи (1452 – 1519) и как великого изобретателя, и как выдающегося художника. Михаил Васильевич Ломоносов (1711 – 1765) внёс не только вклад в физику, химию, геологию и др. науки, но был прекрасным стихотворцем. Многие учёные были глубоко верующими людьми. У Ньютона (1643 – 1727) есть не только труды по механике и оптике, но и толкование на книгу «Апокалипсис». В Средние века считалось, что задача физики – через Творение постигать Творца.

М.В. Ломоносов
(1711 – 1765)

Что же нужно для возникновения и развития науки? Прежде всего, нужны люди, которые могли бы наукой заниматься. В первобытном обществе, когда все члены племени заняты поиском пропитания, просто некому размышлять об устройстве мира. Для науки нужно государство, которое бы позволило бы определённой группе людей не заботиться каждый день о еде, а заняться иными проблемами. Первые государства возникли в Междуречье и Древнем Египте. Там были получены многие знания, особенно в области астрономии. В Междуречье возникла шестидесятеричная система счисления, дошедшая до нас в делении часов на 60 частей. Но в Междуречье и Древнем Египте структура общества была строго упорядочена, накопленные знания хранились у жрецов в тайне и были недоступны для большинства граждан. Правители огромных государств Междуречья и Древнего Египта справлялись с управлением имеющимися средствами, в развитии науки не было необходимости.

Больших высот наука достигла в Древней Греции. Этому способствовало несколько причин. Древняя Греции представляла собой множество независимых городов-государств. Они были разбросаны по всему Средиземному морю, включая множество островов. Эти города поддерживали торговые связи, что стимулировало развитие кораблестроения и др. ремёсел. Знания по астрономии, геометрии, механики и др. наукам не хранились в секрете, а использовались для развития ремёсел. В Афинах в V веке до н.э. все свободные граждане (мужчины) были грамотные. Существовали «гимнасии», которые по современным меркам можно отнести к высшим учебным заведениям.

Кроме этого, для развития науки нужна возможность свободно мыслить. В Древней Греции учёные могли себе позволить порассуждать о том, что есть первичная материя. Фалес Милетский (637 – 558 до н.э.) считал, что основой всего является вода, Гераклит (544 – 483 до н.э.) – огонь, Демокрит (460 – 370 до н.э.) – атомы… и т.д. Наличие множества городов и постоянная связь между ними способствовало обмену мнениями, конкурентной борьбе разных школ. В Египте или Вавилоне такое было невозможно. Жрецы «точно знали» как устроен мир. В условиях жёсткой центральной власти, когда мифы утверждали божественное происхождение царей, никакие философские рассуждения об устройстве мира были невозможны. Власть поддерживала жрецов, а жрецы поддерживали власть. В демократических городах-государствах Древней Греции мифология не поддерживала властителей, жрецы выполняли скромную роль служителей в храмах и не вмешивались в светскую жизнь общества.

Слово «физика» происходит от греческого φύσις – «природа». По представлению древних греков природа существует по определённым законам, которые не нарушают даже боги. Дело людей – эти законы постигать. Очень точно об этом написал древнеримский поэт Лукреций Кар (99 – 50 до н.э.). В 58 г. до н.э. он создал поэму «О природе вещей». Лукреций призывает отмести суеверия, всё в мире происходит по законам природы:

> Ныне не стрелами яркими дня и не солнца лучами
> Надо рассеивать ужасы и помрачение духа,
> Но изучением и толкованьем законов природы.
> Первоначальное правило ставит природа такое:
> Из ничего даже волей богов ничего не творится. [2]

Наука по Лукрецию призвана бороться с суевериями. Человек получает знания о законах природы и использует их в своих целях. Таким, образом, в Древней Греции научные знания, с одной стороны, не держались в секрете, с другой – были востребованы обществом.

Также важным фактором развития науки было поддержание культурных и научных связей между городами. Например, Аристотель родился на севере Греции, но обучался в Афинах, Архимед, родившись в Сиракузах, получил образование в Александрии. Заметим, что в Александрии находилась крупнейшая библиотека древности, собравшая около 700 тыс. рукописей. Совокупность этих факторов и определило развитие науки в Древней Греции.

---

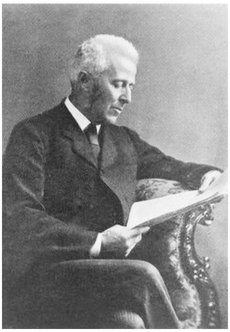
[2] Здесь и далее поэма цитируется в переводе И. Рачинского, Москва, ОГИЗ, 1933

Глава 2. Первые наблюдения

Итак, физика начинается с наблюдений за природой. Но мы тоже постоянно наблюдаем за окружающим миром: когда идём по улице, сидим в парке на скамейке, занимаемся спортом на свежем воздухе… Чем наблюдения учёного отличается от нашего повседневного опыта?

Артур Конан Дойль (1859 – 1930)

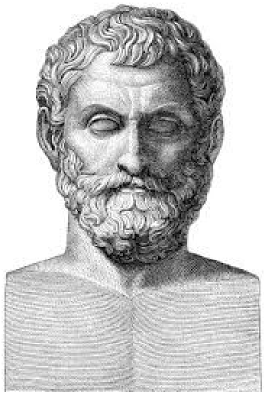
Важнейшим качеством учёного является умение отделять неизведанное, загадочное от обычного. Многие вещи настолько привычны, что мы проходим мимо них, не обращая внимания, просто не замечая. Очень хорошо это описано в сборнике английского писателя Артура Конан Дойля (1859 – 1930) «Записки о Шерлоке Холмсе». Великий сыщик Шерлок Холмс постоянно говорил своему другу доктору Ватсону, что тот смотрит, но не замечает. Классический пример невнимательности Ватсона: однажды Холмс поймал его на том, что он десятки раз поднимался по лестнице в гостиной, но не знает сколько на ней ступенек. Конечно, это мелочь, но мелочь тоже может быть важной. Часто незаметная на первый взгляд деталь позволяла Холмсу раскрыть преступление.



Джозеф Белл (1837 – 1911)

Существовал ли Холмс на самом деле? Прообразом литературного героя был преподаватель Конан Дойля в Эдинбургском университете – хирург Джозеф Белл (1837 – 1911). Джозеф Белл учил своих студентов замечать мелочи. Конан Дойля (и не только его) поражало, что уже при первом знакомстве с пациентом Джозеф Белл определял не только его болезнь, но профессию и характер больного. «Вы всё видите, но не даёте труда поразмыслить о том, что Вы видите», говорил Джозеф Белл студентам. Конан Дойль считал, что ему очень повезло, что Джозеф Белл сделал его своим ассистентом, – это позволило ему постоянно изучать методы его работы.

С каких наблюдений начиналась физика? Древнейший учёный, о котором у нас есть более-менее достоверная информация, это Фалес (637 – 558 до н.э.) из процветающего в то время города-государства Милет на побережье Малой Азии (современная Турция). Считается, что расцвет древнегреческой науки и культуры начинается с V века до н.э. – так называемого «золотого века Перикла», связанного с возвышением Афин. С этой точки зрения Фалес Милетский является древним даже для древних греков.



Фалес (637 – 558)

Фалес происходил из знатной семьи, был советником правителя Милета Фрасибула. По легенде он обучался в Египте. Нужно иметь в виду, что в VII веке до н.э. наука в Греции только начала зарождаться, а Египет и государства Междуречья (Вавилонское царство, Ассирия и др.) гораздо древнее, и там хранилось много знаний, в том числе по геометрии и астрономии. Возможно, свои знаменитые башни зиккураты они использовали как раз для астрономических наблюдений. Раскопки показали, что времена наступления затмений фиксировались звездочётами (жрецами) Ассирии по крайней мере с VIII века до н.э. Они выяснили, что затмения с большой точностью повторяются через 6585 и 1/3 суток. Это, так называемый, «драконический период», по-гречески – «сарос». В результате длительных войн в 605 году до н.э. Ассирия пала. Многие

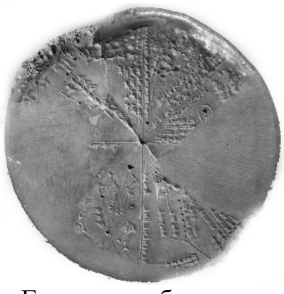
Зиккурат

звездочёты бежали к египетскому фараону Нехо II (в Библии он упоминается, как фараон Нехао, 4-ая Царств, 23:29).

Очень удачно, что Фалес попал в Египет как раз в это время. От египетских или ассирийских жрецов Фалес научился предсказывать затмения. Обычно жрецы не открывают свои секреты непосвященным, но Фалес сумел получить доступ к этим знаниям. Есть свидетельства, что, вернувшись в Милет, Фалес публично предсказал солнечное затмение 585 года до н.э.

На примере предсказаний затмений можно увидеть разницу в подходе изучения мира Фалеса и последующих учёных Древней Греции от звездочётов Древнего востока. Фалес не только научился предсказывать затмения, но и стал размышлять о *причинах* затмений. Фалес первым высказал *гипотезу*, что солнечные затмения вызваны тем, что Луна закрывает Солнце.

Ход мысли Фалеса, в целом, ясен. Получив доступ к многолетним наблюдениям ассирийских звездочётов, он не мог не обратить внимание, что солнечные затмения происходят всегда точно в новолунье. Фалес был первым, кто измерил видимые размеры Солнца и Луны и получил, что они одинаковы и равны примерно 0,5 градуса. Остаётся один шаг до гипотезы, что именно Луна загораживает солнечный свет.



Глиняная табличка с изображением созвездий. Ассирия VII век до н.э.

Почему же звездочёты Ассирии не обратили внимание на положение Луны при солнечных затмениях и её возможную роль в этом? В ассирийской державе звездочёты были придворными и на основании небесных знамений предсказывали будущее царю. Считалось, что небесные знамения происходят по воле богов, и умение предсказывать их означало близость звездочётов к богам. Даже, если звездочёты Ассирии догадывались о роли Луны в солнечных затмениях, в их интересах было молчать об этом. Высказать гипотезу о роли Луны публично – означало бы принизить своё значение в глазах царя. Получилось бы тогда, что затмения – это всего лишь периодический процесс, а не выражение воли богов.

Милет, античный театр

Фалес же не был жрецом или царедворцем. Он был свободным гражданином Милета, состоятельным торговцем и, скорее всего, ездил в Египет по торговым делам. Он был уверен, что природа существует по определённым законам, которые не нарушают даже боги. Он и последующие греческие мыслители пытались постигнуть эти законы. Поэтому их интересовали не только явления, но их *причины*. Фалесу не было смысла хранить полученные в Египте знания в тайне. Солнечные и лунные затмения не сильно заботили правителей греческих городов-государств. Даже если они и предвещали что-то хорошее или плохое, они наблюдались одинаково во многих соседних городах-государствах. Как понять, к кому из них они относились? Когда нужно было узнать судьбу, древние греки обращались к оракулам. Персональные астрологические прогнозы в Древней Греции появятся значительно позже, примерно через два века после Фалеса.

Роль Луны в солнечных затмениях не следует непосредственно из наблюдений. Это можно считать первой в истории *научной гипотезой*, которая получила потом подтверждение. Таким образом, можно сказать, что наука в Древней Греции начала свой путь примерно в 600 году до н.э. Фалес или его ученик Анаксимандр также установили, что Луна светит не сама, а отражает (точнее, рассеивает) солнечный свет. Эту гипотезу они выдвинули, изучая взаимное положения Солнца и Луны в полнолунье, новолунье и когда Луна видна в виде серпа.

Фалес и янтарь

Фалес считается первооткрывателем *электрических* явлений. Существует легенда, что Фалес заметил, что при натирании шерстью янтаря, к нему начинают прилипать маленькие ворсинки, которые потом отпадают. По другим версиям это заметила его дочь, у которой была прялка, украшенная янтарём. Шерсть тёрлась о янтарь, и девушка заметила, что к янтарю стали притягиваться мелкие шерстяные ворсинки. Вряд ли Фалес или его дочь были первыми увидевшими таинственное свойство янтаря – пряли все девушки, янтарь был хорошо известен в Греции. Но Фалес, в отличие от многих других, не только увидел, но и *обратил на это внимание*.

На примере наблюдения за янтарём, можно увидеть три важнейших качества учёного. **Первое** качество учёного – умение замечать необычное. Фалес увидел в притяжении частичек шерсти янтарём *новое явление*. **Второе** качество учёного – это стремление *исследовать* открытое явление. Фалес многократно повторил опыты с янтарём, шерстью, пёрышками, соломинками и др. Он определил, что силы притяжения действуют на расстоянии всего нескольких сантиметров, кроме того, при натирании янтаря он слышал лёгкое потрескивание. Фалес даже дал объяснение увиденному, которое вряд ли кого-то сегодня удовлетворит: он решил, что поскольку янтарь вызывает движение, то у янтаря есть душа. Янтарь по-древнегречески – «электрон» (ἤλεκτρον). От камня, обладающего удивительными свойствами, и происходит название науки «электричество».

Третье качество учёного – сделанные наблюдения нужно делать достоянием научного сообщества. Фалес обратил внимание своих учеников на эти свойства янтаря. Можно сказать, что он *опубликовал* свои наблюдения, благодаря чему мы знаем о них спустя 27 веков.

Фалес также описал притяжение железных предметов кусками *магнитной* руды. Заметим, что Фалес знал только о притяжении магнитом железа. Сегодня известно, что магниты способны и притягиваться, и отталкиваться. Впервые о способности магнитов отталкиваться упоминает римский учёный и поэт Лукреций Кар (около 99 – 50 до н.э.) через 500 лет после Фалеса. Также Фалес не знал о взаимосвязи электрических и магнитных явлений. Это откроют только в XIX веке.

В курсе математики Фалес Милетский известен своей теоремой о равенстве отрезков, отсекаемых параллельными прямыми. Параллельные просто так не увидишь, их нужно построить. Почему Фалеса заинтересовали эти построения?

Как мы уже говорили, физика оперирует с объективным знанием. А объективное знание начинается тогда, когда мы можем что-то количественно измерить. Само название науки «геометрии» происходит от греческих слов «ге» – «земля» и «метрио» – «измеряю». Измерить длину участка земли не так просто, ещё сложнее измерить высоту предмета. Залезать каждый раз на дерево, чтобы измерить его высоту, неудобно. А можно ли измерить высоту дерева, не залезая на него, или расстояние до корабля, не заходя в воду?

Египетские пирамиды

Одна из легенд о Фалесе связана с тем, что он поспорил с египетскими жрецами, что сможет измерить высоту пирамиды Хеопса, не забираясь на неё. В солнечный день он воткнул в землю вертикальный шест и сказал, что когда длина тени BC от шеста будет равна его длине AB, то длина тени пирамиды OM будет равна её высоте OH (рис. 2-1). Эта легенда о Фалесе глубоко символична. Ведь Фалес учился наукам у египетских жрецов. Раз он выиграл спор у жрецов, значит он превзошёл своих учителей!

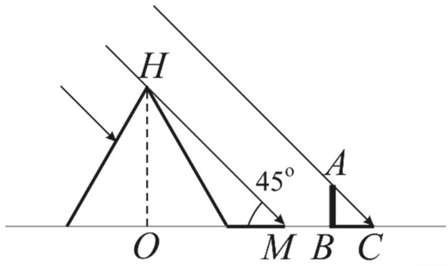


Рис. 2-1.
Измерение высоты пирамиды по её тени

Способ измерения высоты по тени не так очевиден, как может показаться с первого взгляда. Фалес использовал важнейшее свойство света – свет распространяется по прямой. Сегодня мы называем это *первым законом геометрической оптики*. Наглядно прямолинейное распространение светового луча можно увидеть, если посветить лазерной указкой в несильном тумане.

Действительно, высоту столбов, башен, деревьев и др. можно измерить с помощью их тени. Но обязательно ли ждать момента, когда тень от шеста, воткнутого в землю (втыкать обязательно вертикально!), будет равна его длине? А если в это мгновенье Солнце зайдёт за тучу, то ждать следующего дня?

Фалес жил за 300 лет до «отца геометрии» – Евклида (около 325 – 265 до н.э.), поэтому многое приходилось придумывать самому. Он придумал теорему Фалеса. Может показаться, что эта теорема звучит очень громоздко.

«Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных между собой отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки» (рис. 2-2).

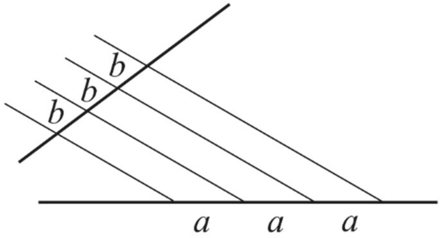


Рис. 2-2.
Теорема Фалеса

Теорема Фалеса позволяет измерить высоту пирамиды при различных положениях Солнца. Разобьём тень пирамиды на равные отрезки *CB*, *BD*, *DE*, как показано на рис. 2-3. Проведём через них прямые, параллельные солнечным лучам. По теореме Фалеса получилось множество равных отрезков *OK*, *KL*... Посчитаем их число и получим, что высота пирамиды *OH* во столько же раз больше высоты шеста *AB*, во сколько раз длина тени пирамиды *OC* больше длины тени от шеста *BC*.

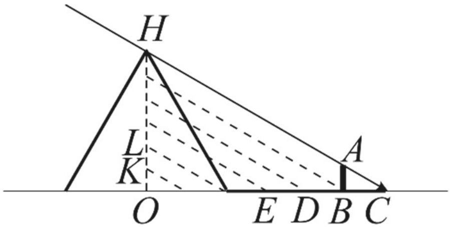


Рис. 2-3.
Измерение высоты пирамиды с использованием пропорций

Фактически мы получили соотношение подобия для треугольников. Подобными треугольниками называются треугольники, у которых все углы равны. Например, на рис. 2-4 треугольники *ABC* и *AEF* подобны. Также подобны треугольники $A_1B_1C_1$ и $D_1E_1F_1$. Подобные треугольники можно повернуть так, чтобы их стороны были попарно параллельны, как показано на рис. 2-4. Тогда из теоремы Фалеса следует, что у подобных треугольников отношения длин соответственных сторон равны:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}, \qquad \frac{A_1B_1}{D_1E_1} = \frac{A_1C_1}{D_1F_1} = \frac{B_1C_1}{E_1F_1}. \quad (1.1)$$

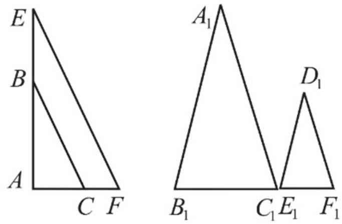


Рис. 2-4.
Две пары подобных треугольников

После того, как задача измерения высоты пирамиды решена, кажется, что в ней нет ничего сложного. Однако, метод Фалеса не так прост: если попытаться измерить высоты предметов по их тени в комнате от лампочки, то ничего не выйдет. Два шеста одинаковой длины *AB* и *EF* могут отбрасывать разные тени *BC* и *FG*, как показано на рис. 2-5. Когда же можно пользоваться способом Фалеса?

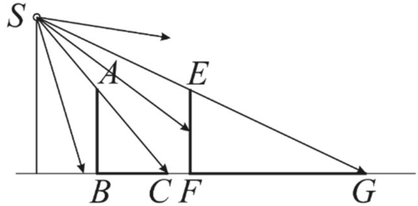


Рис. 2-5.
Тени от точечного источника *S*

Чтобы определять размеры по тени методом Фалеса, лучи света должны быть *параллельны*. Лучи от лампочки расходятся во все стороны, поэтому углы треугольников *ABC* и *EFG* не обязательно равны. От Солнца лучи тоже расходятся во все стороны, но Солнце находится очень далеко от Земли – на расстоянии 150 млн. км, поэтому лучи, попавшие на Землю от какой-либо точки на Солнце, например, от центра солнечного диска (рис. 2-6), можно считать параллельными.

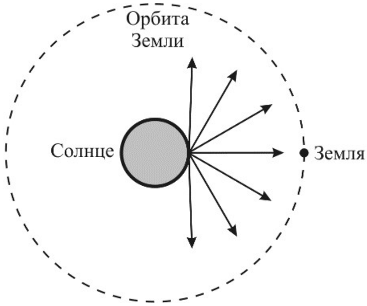


Рис. 2-6.
Лучи света от Солнца

Измерение высоты по тени имеет ещё один существенный недостаток – так нельзя измерить высоту тонких объектов. Ввиду большого размера Солнца оно представляется нам в виде диска с угловым размером примерно 0,5º, как показано на рис. 2-7. От каждой точки на солнечном диске *A*, *B* или *C* приходят практически параллельные лучи, но большие размеры Солнца приводят к возникновению так называемой полутени.

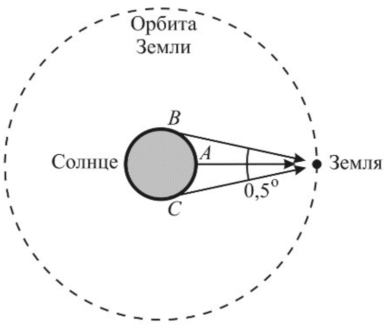


Рис. 2-7.
Угловые размеры Солнца

Причина возникновения полутени показано на рис. 2-8. В области *OE* шест *OH* закрывает все солнечные лучи, поэтому там образуется тень. В область *ED* будет попадать свет от края солнечного диска *B*, а в область *DF* будет падать свет ещё и от центральной части *A*. Таким образом, *EF* – это область полутени.

Если предмет находится высоко над землёй, то у него вовсе не будет тени. Например, вертолёт на рис. 2-9 не отбрасывает тени, поскольку не может полностью загородить Солнце. На какой высоте это будет? По современным данным диаметр Солнца 1,4 млн. км, а расстояние до Солнца – 150 млн. км, т.е. примерно в 110 раз больше диаметра. Соответственно, если вертолёт поднимется на высоту в 110 раз больше своего размера, то он уже не сможет полностью загородить Солнце.

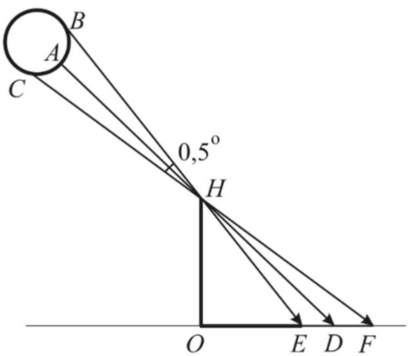


Рис. 2-8.
Образование полутени

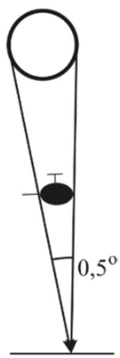


Рис. 2-9.
У вертолёта нет тени

Пирамида Хеопса достаточно большой объект, а вот шест у Фалеса не должен был быть слишком тонким. Если толщина шеста была бы в 110 раз меньше расстояния *AC* на рис. 2-3, то верхушка шеста уже не отбрасывала бы тени.

Закон прямолинейного распространении света позволяет измерить высоту предмета, не используя тени от Солнца. Достаточно совместить взглядом верхушки измеряемого предмета и шеста известной высоты. Герои книги Жюль Верна «Таинственный остров» измерили высоту скалы *AB*, как показано на рис. 2-10. Инженер воткнул в землю вертикальный шест *CD*, лёг на песок и отодвигался до тех пор, пока вершина шеста *C* не совпала с вершиной скалы *A*. Место рядом со своим глазом он отметил колышком *K*.

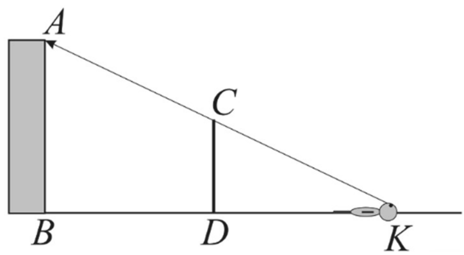


Рис. 2-10.
Определение высоты скалы

Задача. Вычислить высоту скалы (в футах) на рис. 2-10, зная, что высота шеста над песком равна 10 футам, расстояние от шеста до колышка 15 футов, а от основания скалы до колышка – 500 футов.

Решение. Треугольники *ABK* и *CDK* подобны. Соотношения подобия:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BK}{DK},$$

$$AB = CD\frac{BK}{DK} = 10\frac{500}{15} \approx 333 \text{ (фута)}.$$

Ответ: 333 фута.

Используя закон о прямолинейном распространении света, можно измерять не только высоты. Согласно легенде Фалес измерял расстояние до кораблей, приближающихся к порту. Этим же методом Вы можете измерить ширину реки, не переплывая её. Попробуйте пока не читать дальше, а сообразить, как это сделать.

Схема представлена на рис. 2-11. Находясь на берегу реки в точке *A*, выберите какой-нибудь предмет на противоположном берегу вблизи воды точно напротив Вас, например, дерево (точка *B*). Затем надо идти по берегу, пока угол между точками *A*, *B* и наблюдателем (точка *C*) не станет равным 45°. Угол 45° можно отмерить школьным угольником. Получился равнобедренный прямоугольный треугольник. Осталось измерить расстояние *AC*. Ширина реки *AB* равна *AC*.

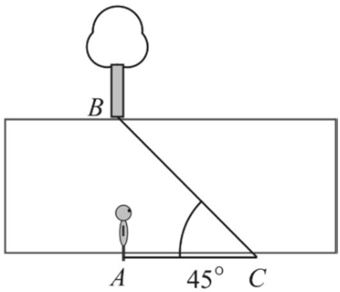


Рис. 2-11.
Определение ширины реки

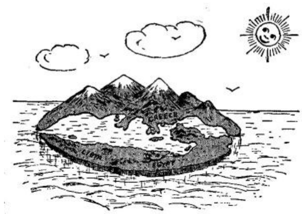
Достоверных данных о жизни Фалеса мало, поэтому он окружен легендами. Однажды его упрекнули, что он обладает большими знаниями, но при этом беден. Фалес был хорошим астрономом и смог предсказать большой урожай оливок. Он скупил все имеющиеся маслобойни, в которых из оливок получали оливковое масло, и, когда, действительно, уродилось много оливок, Фалес, говоря современным языком, стал монополистом производства оливкового масла. Это позволило ему разбогатеть. После этого он сказал, что мудрые люди могут обратить свои знания для обогащения, но у них другие жизненные цели.

Фалес занимался не только астрономией и геометрией. Его интересовало устройство мира. Фалес считал, что основой всего является *вода*. Возможно, эту идею он почерпнул у египетских жрецов. У египтян был миф, что в самом начале был только бесконечный и тёмный океан-хаос – Нун. И появился в этом хаосе бог Атум, который создал бога воздуха Шу и богиню воды Тефнут. А от Шу и Тефнут родились Геб – бог земли и Нут – богиня неба…

Сотворение мира,
Древний Египет

Но Фалес не просто пересказал египетский миф, он его *переосмыслил*. В тексте мифа нельзя ничего ни добавить, ни убавить. Этим можно разозлить богов, а, точнее, жрецов. Фалес из мифа сделал философскую идею, которую можно и нужно обсуждать, приводить аргументы за и против. Миф не нужно обосновывать, философскую идею – нужно. Развитие науки требует определённой свободы мышления. Вода у Фалеса не часть богини Тефнут, а самостоятельная стихия, из которой строится весь мир.

Фалес интуитивно чувствовал, что всё вокруг взаимосвязано. Вода – очень удобный претендент на первичное вещество. Это самое распространённое вещество в окружающем мире. Вода присутствует всюду: море, реки, дожди... Растения питаются водой, без воды невозможна жизнь. По Фалесу Земля плавает в воде, что вызывает землетрясения. Фалес полагал, что всё образовалось из воды: при затвердевании вода превращается в камни, при испарении становится воздухом. Тому есть «подтверждение». В пещерах из камней сочится вода, утром на камнях появляется роса, лёд тает,



Фалес: Земля
плавает в воде

медь при нагревании становится жидкой, а оставленная в открытом сосуде вода испаряется.

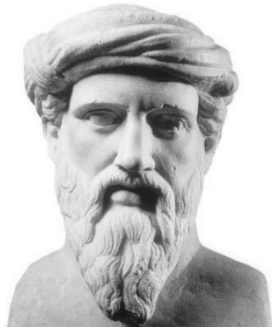
Анаксимандр с солнечными часами

Не стоит оценивать утверждение Фалеса, что вода превращается в камни с высоты современной науки. Не можем же ожидать, что Фалес скажет, что всё состоит из протонов, нейтронов и электронов. За неимением лучшего, Фалес определил на роль первичного вещества воду. Его ученик Анаксимандр Милетский (611 – 546 до н.э.) пошёл дальше по пути абстракции и постановил, что в основе мира лежит особая газообразная среда – «апейрон» (греч. «беспредельное»). Эта среда может быть разреженной и густой, из неё происходят все вещества. Поскольку закономерности разрежения и загустевания апейрона определить не удалось, а объяснить многообразие мира было нужно, то Эмпедокл (490 – 430 до н.э.) решил, что в основе мира лежит 4 субстанции: огонь, воздух, вода и земля. Всё на Земле является результатом смешивания этих субстанций в разных пропорциях. Эти взгляды сейчас кажутся наивными, но нужно помнить, что современная наука возникла как раз благодаря тому, что в древности кому-то было не лень размышлять об устройстве мира. В Египте и Междуречье ответы на эти вопросы были привилегией жрецов. Философские размышления греческих мыслителей о происхождении мира замещали мифы и в определённом смысле поддерживали относительно светский характер городов-государств. Причём большинство учёных делали это из стремления к поиску истины, не получая зарплаты от государства. Главное – у них было понимание единства природы, но для обозначения первичной материи в древних языках не было достаточных слов. Особый взгляд на строение мира имел Пифагор, о чём речь в следующей главе.

Глава 3. Развитие представлений о числах

3.1. Учение Пифагора о числах

Пифагор (570 – 490 до н.э.) известен своей знаменитой теоремой: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Почему Пифагора заинтересовали квадраты сторон треугольника?



Пифагор (570 – 490)

Как и других мыслителей того времени Пифагора занимал глобальный вопрос: какие силы управляют миром? Случайно ли то, что происходит в мире, или во всём есть внутренняя связь?

О Пифагоре мало достоверных данных, больше легенд. Родился он на острове Самос в состоятельной семье. Согласно легенде, Пифагор учился в Милете у Фалеса, и именно Фалес посоветовал ему поехать учиться в Египет. Пифагор учился 22 года в Египте, а потом 12 лет в Вавилоне. Затем Пифагор вернулся на родной остров Самос с намерением создать философскую школу. Когда это не получилось сделать на Самосе, Пифагор перебрался в город Кротон на берегу Тарентского залива на юго-востоке современной Италии, где примерно в 530 году до н.э. создал свою школу. Школа была закрытой, то есть знания не должны были передаваться непосвященным за пределы школы. За приёмом в школу и обучением следил сам Пифагор. Его авторитет был непререкаем. В его школе была фраза, ставшая затем крылатой: «Сам сказал» (на латыни – «*ipse dixit*»). То есть, сказанное Пифагором считалось истиной. Сегодня истина в физике определяется результатами экспериментов, но в древности были другие понятия о истине в науке. Пифагор планировал посылать высокообразованных учеников советниками к правителям городов-государств и через них управлять делами всей Греции. Для общения между собой пифагорейцы (ученики Пифагора) использовали специальный секретный язык. Стремление Пифагора вмешиваться в жизнь Кротона вызвало недовольство, возник заговор, школа была разграблена. По одним легендам Пифагор был убит, по другим – успел бежать.

Пифагор считал, что в основании мира лежит гармония *чисел*. Учение Пифагора о числах называют *нумерологией*. Наукой нумерологию назвать сложно, это в большей степени мистическая система, соединяющая особые свойства чисел и предсказание будущего. Например, в системе Пифагора единица считалась единением, двойка – разъединением и т.д. Впрочем, ввиду закрытости школы учение Пифагора известно отрывками из произведений поздних античных писателей.

Пифагор исследовал всевозможные математические закономерности. Нужно иметь в виду, что в античности первичной была геометрия, а алгебра выросла из геометрических задач. Пифагорейцы представляли любое число в виде набора точек на плоскости или в объёме. Как следствие, они признавали только натуральные числа, ноль числом не считался, отрицательные числа появятся только в средние века, десятичных дробей не было, а обычные дроби: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}$ и др. считались не числами, а отношениями.

Пифагорейцы различали *фигурные числа*, т.е. классифицировали числа по тем фигурам, которые можно было создать по камешкам. Например, были *треугольные* числа: 1, 3, 6, 10, 15 и т.д. (см. рис. 3-1). *Квадратными*, как легко догадаться, были числа: 1, 4, 9, 16, 25 и т.д. Кубическими: 1, 8, 27 и т.д. Сегодня мы также говорим: «Возвести число в квадрат, возвести в куб…» Были числа, образующие пятиугольники, *n*-угольники, пирамиды и т.д.

Пифагорейцы сделали много открытий. Например, из геометрических построений на рис. 3-1, они получили, что треугольные числа получаются, как сумма чисел арифметической прогрессии:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$$

а сумма нечётных чисел:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$$

является квадратным числом.

Рис. 3-1.
Треугольные (слева) и квадратные (справа) числа

Произведение чисел пифагорейцы рассматривали как площадь прямоугольника, а распределительный закон: $a(b + c) = ab + ac$ они получили как сложение площадей прямоугольников (см. рис. 3-2). Не имеющие сомножителей простые числа пифагорейцы называли линейными, имеющие два сомножителя – плоскими, три сомножителя – телесными.

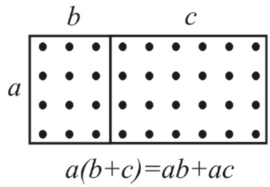


Рис. 3-2.
К выводу распределительного закона

Поэтому неудивителен интерес Пифагора к прямоугольникам и прямоугольным треугольникам. В частности, Пифагор доказал, что опирающиеся на диаметр круга углы – прямые (см. рис. 3-3), хотя, есть данные, что это знал ещё Фалес.

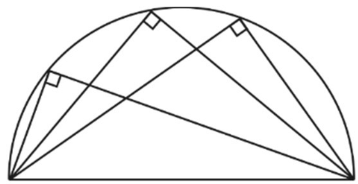


Рис. 3-3.
Углы, опирающиеся на диаметр

Сегодня мы можем сформулировать теорему Пифагора: «сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы», предполагая, что можно взять линейку, измерить длины сторон и получить нужную сумму. Но в те времена нужно было сделать геометрическое построение, поэтому теорема Пифагора звучала: «сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе» (рис. 3-4).

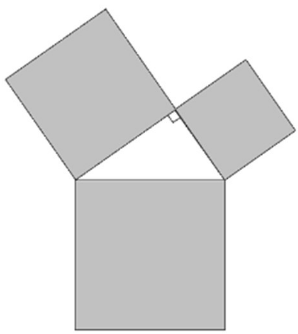


Рис. 3-4.
Теорема Пифагора

Сама теорема, возможно, была известна ещё египтянам. Во всяком случае, они знали, что, так называемый, «египетский треугольник» со сторонами 3, 4 и 5 является прямоугольным. Но заслуга Пифагора в том, что он этот факт *доказал* и, более того, именно Пифагор ввёл *доказательство* в математику.

У чисел 3, 4 и 5, образующих «египетский треугольник», сумма квадратов двух первых чисел равна квадрату третьего: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Понятно, что мы можем построить множество треугольников, кратных «египетскому» со сторонами в 2 раза больше: 6, 8, 10, в 3 раза больше: 9, 12, 15, и т.д.

Задача. Существуют ли ещё тройки взаимно простых целых чисел, у которых сумма квадратов двух чисел была бы равна квадрату третьего?

Такие тройки чисел называются *пифагоровыми*. Оказывается, таких троек существует бесконечное множество. Решение разобрано в Приложении №1.

Пифагорейцы получили, что диагональ квадрата со стороной 1 не сводится к дроби из двух натуральных чисел, что составило для них некоторую проблему. Поскольку иррациональных чисел типа $\sqrt{2}$ они не признавали, то получалось, что геометрические построения богаче алгебраических выражений. Такая ситуация продолжалась до Нового времени.

Пифагор не мог обойти вопрос о строении космоса. Фалес представлял Землю в виде диска, плавающего в мировом океане. Исходя из совершенства космоса, Пифагор заключил, что Земля имеет форму шара – самой совершенной фигуры.

Монохорд

Вселенная (космос) представлялась Пифагору музыкальной гармонией сфер. Недаром в его школе большое внимание уделялось обучению музыке. Но как совместить музыку и числа? По легенде Пифагор зашёл в кузницу и обнаружил, что звон молотка зависит от его размера: чем меньше молоток, тем выше от него звук. Это *наблюдение* заинтересовало Пифагора, и он решил его *исследовать*, сделав музыкальный инструмент с одной струной (*монохорд*). При этом рабочую длину струны можно было изменять. В результате Пифагор обнаружил,

Пифагор и музыка. Из книги Франчино Гаффурио, 1492 год

что чем короче струна, тем выше её музыкальный тон. Таким образом, Пифагор является родоначальником науки *акустики*.

Сегодня зависимость высоты музыкального тона от длины струны мы используем, когда зажимаем пальцем струну гитары, скрипки и др. струнных инструментов. Заметим, что высота тона зависит не только от длины, но также от толщины и натяжения струны.

Ксилофон

Маленькие колокольчики издают более высокие тона, чем большие колокола. Очень наглядно зависимость высоты тона от размера пластинки можно увидеть на ксилофоне.

Современным людям сложно понять, насколько сильное влияние оказало учение о числах Пифагора на мыслителей античности. Более того, оно пережило тысячелетия. О его влиянии на развитие науки можно судить по тому, что в 1632 году Галилей начинает свою книгу «Диалог о двух главнейших системах мира, Птолемеевой и Коперниковой» (за которую его чуть не сожгли), рассуждением об учении Пифагора. Книга посвящена гелиоцентрической системе мира. Казалось бы, причём здесь учение Пифагора о числах? Но на первых страницах Галилей пишет, что наше пространство имеет три измерения, потому что Пифагор считал тройку совершенным числом. Сегодня такое «доказательство» выглядит неубедительным, но, видимо, во времена Галилея на многие вещи смотрели иначе. Впрочем, и сегодня многие считают число 13 признаком несчастья, особенно, если тринадцатое число попадает на пятницу. Так что нумерология живёт и в наше время.

3.2. Размерность в физике

Геометрическое видение мира поднимает важный вопрос: какие числа можно складывать? С точки зрения пифагорейцев выражение: $x^2 + x$ бессмысленно: x^2 воспринималось как площадь, а x – как линейное число, но к площади нельзя прибавить длину. Сегодня в физике строго различают *размерные и безразмерные* величины.

Размерность связана с единицами измерения физической величины.

Длину измеряют в метрах, километрах, сантиметрах и др. При желании длину можно измерять в дюймах, футах, милях, аршинах, вёрстах и др. уже устаревших единицах длины. Площадь измеряют в квадратных метрах (квадратных сантиметрах и др.), объём – в кубических метрах (кубических сантиметрах и др.). Время измеряют в секундах, минутах, часах, сутках и др. Позже мы познакомимся с единицами массы, силы и др.

Если величина x безразмерная, то выражение $x^2 + x$ не вызывает вопросов. Но если через x мы обозначили длину объекта или время движения, то выражение $x^2 + x$ уже не имеет физического смысла. Величины с разной физической размерностью НЕЛЬЗЯ складывать или вычитать. Нельзя, например, складывать длину и площадь или длину и время. Поэтому при решении задач нужно строго следить за размерностью. Неправильная размерность в физике считается очень грубой ошибкой.

Глава 4. Описание движения

4.1. Путь и перемещение

Мы познакомились с измерением длины. Перейдём теперь к другой древнейшей задаче – описанию движения. Для этого нужно уметь измерять не только длину, но и время. Не вдаваясь в детали, будем считать, что все умеют пользоваться линейкой (рулеткой, микрометром) и секундомером. Но есть разные виды движения. На востоке, когда видят, что человек прилагает много усилий, но не достигает заметных результатов, говорят, что осёл, качающий воду из колодца, может пройти за день 100 вёрст, но остаться к вечеру там же, где был утром. Пословица, видимо появилась, когда ещё не было электрических насосов, а воду выкачивали из колодцев вручную или с помощью животных. Как отличить движение осла, который весь день ходил, но остался возле того-же колодца, от осла, который просто весь день стоял на месте?

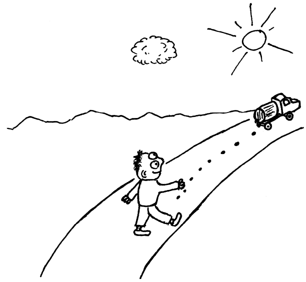
Осёл, качающий воду из колодца

Для этого в физике вводят два понятия: *пути* и *перемещения*. Перемещение – это отрезок, соединяющий начало и конец пути. Отрезок, у которого определено, какой конец является началом, а какой концом – называется *вектором*. Слово «вектор» может показаться чем-то таинственным, связанным с премудростями высшей математики. Действительно, математики придумали много сложных операций с векторами, но в самом слове «вектор» нет ничего особенного. Оно не более сложное, чем слово «отрезок». Сравнивая перемещения ослов за день, мы можем сказать, что у обоих ослов перемещение практически нулевое. Другое дело – длина пройденного пути. Стоящий на месте осёл за день прошёл нулевой путь. А другой? Если бы к этому ослу прицепили бы катушку с нитками, и нить, падая, прикреплялась бы к земле, то длина пути – это длина размотавшейся нити.

Соответственно, в физике различают два вида скорости. *Путевая скорость* – это отношение длины пути ко времени, *векторная скорость* – это отношение перемещения ко времени. Далее, если не указано обратное, мы будем говорить о путевой скорости, которая вычисляется по формуле:

$$v = \frac{L}{t}\,, \qquad (4.1)$$

где L – путь, пройденный за время t.



Капли на асфальте указывают на равномерное движение

Длину обычно измеряют в метрах, время в секундах, поэтому скорость можно измерять в «метрах в секунду» (м/с). Иногда удобно измерять скорость в «километрах в час» (км/ч).

Задача. Школьник идёт в школу со скоростью 1 м/с. Какова его скорость в «км/ч»? Спешит ли он в школу?

Решение. В одном часе 3600 секунд, за это время школьник пройдёт 3600 метров или 3,6 км. Значит, его скорость 3,6 км/ч. Обычная скорость пешехода около 5 км/час. Раз школьник идёт со скоростью 3,6 км/ч, то он не спешит.

Ответ: 3,6 км/ч, не спешит.

4.2. Средняя скорость

Движение человека или автомобиля редко бывает равномерным. Рассмотрим теперь *неравномерное* движение. Введём понятие *средней скорости.*

Средней (путевой) скоростью называется отношение:

$$v = \frac{L}{t}\,,$$

где L – весь путь, пройденный телом, t – полное время движения.

По сути, формула для средней скорости не отличается от формулы (4.1). Термин «средняя» означает, что речь идёт о неравномерном движении.

Задача. Между городами A и B расстояние $L = 100$ км. Из A в B едут две машины. Первая машина проехала половину *времени* со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а вторую половину времени со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Вторая машина проехала половину *расстояния* со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а вторую половину – со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Найти средние скорости обеих машин.

Решение. Пусть первая машина ехала время $2t$. Тогда первая половина времени составила t, и машина проехала $L_1 = v_1 t$. Вторая половина времени также составила t, и машина проехала $L_2 = v_2 t$. Общий путь равен:

$$L = L_1 + L_2 = (v_1 + v_2)t.$$

Отсюда мы можем узнать время t:

$$t = \frac{L}{v_1 + v_2}.$$

Средняя скорость первой машины равна:

$$v_{CP1} = \frac{L}{2t} = \frac{(v_1 + v_2)t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 50 \text{ км/ч}.$$

Вторая машина ехала первую половину расстояния (т.е. расстояние $L/2$) время:

$$t_1 = \frac{L}{2v_1},$$

а вторую половину (расстояние $L/2$) вторая машина ехала время:

$$t_2 = \frac{L}{2v_2}.$$

Средняя скорость второй машины равна:

$$v_{CP2} = \frac{L}{t_1 + t_2} = \frac{L}{\frac{L}{2v_1} + \frac{L}{2v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 48\ \text{км/ч}.$$

Ответ: средняя скорость первой машины – 50 км/ч, второй – 48 км/ч.

Замечание. В общий вид формул для средней скорости не вошло расстояние между городами L, т.е. средняя скорость в данном случае не зависит от расстояния между городами.

4.3. Материальная точка

Возможно, это сразу не заметно, но при измерении скорости ослика, который ходил вокруг колодца, возникает проблема. Одинаковый ли путь проделали левая и правая нога ослика? Когда ослик ходит вокруг колодца по часовой стрелке, то правая нога всё время ближе к колодцу, чем левая. Но чем больше радиус, тем больше длина окружности. Следовательно, за каждый оборот левая нога пройдёт больший путь, чем правая. Что нам принять за длину пути ослика? Если нам не столь важна разность путей правой и левой ноги ослика, то мы можем пренебречь его размерами и изображать его как точку. В физике такой объект называют *материальной точкой*.

Материальная точка – это не реальный предмет, а *физическая модель*. Математика имеет дело с математическими моделями. Чем математическая модель отличается от физической? Математика часто имеет дело с объектами, которых не существует. Например, прямая линия. Математическая линия не имеет толщины, её длина бесконечна. В реальности любая линия имеет конечную длину и её толщина не меньше толщины острия карандаша, которым она начерчена. Физические модели более приближены к реальности. При решении физической задачи часто выбирают главные для этой задачи свойства объектов, игнорируя менее важные. В случае материальной точки для нас важно её положение, но не важны её размеры или форма.

Можно ли рассматривать какое-то тело, как материальную точку или нет – *зависит от задачи*. Например, если мы рассматриваем движение автомобиля между городами, то автомобиль можно представить в виде точки на карте. Если же нужно вычислить сколько автомобилей может разместиться на парковке, то, конечно, нужно учитывать их размеры.

Будем называть *материальной точкой* тело, размерами и формой которого в данной задаче можно пренебречь по сравнению с путём, пройденным телом или расстоянием до других предметов.

В дальнейшем, если не сказано обратное, во всех наших рассуждениях мы будем движущиеся тела полагать материальными точками.

Зенон (490 – 430)

4.4. Апории Зенона

Если задуматься, то в определении скорости можно обнаружить «подводный камень», который заметил Зенон (490 – 430 до н.э.) из города Элея на побережье Италии, примерно в 100 км южнее современного Неаполя.

Он придумал несколько *апорий*. Слово «апория» образовано от греческого «порос» – «выход» и отрицательной частицы «а»; так что буквально «апория» означает «безвыходное положение»; можно также перевести это слово как «затруднение», «задача» или «загадка». Однако, учитывая роль апорий Зенона в развитии математики и физики, их принято называть не задачами, а апориями.

Рассмотрим апорию «Ахиллес и черепаха».

Пусть вначале быстроногий воин Ахиллес находится в точке A, а черепаха в точке B_1 (рис. 4-1). Когда Ахиллес добежит до точки B_1, черепаха успеет проползти вперед до точки B_2. Ахиллес добежит и до точки B_2, но черепаха уже будет в точке B_3. И так далее... Получается, что, какое бы число отрезков Ахиллес ни преодолел, он не догонит черепаху. Разумеется, мы считаем Ахиллеса и черепаху материальными точками.

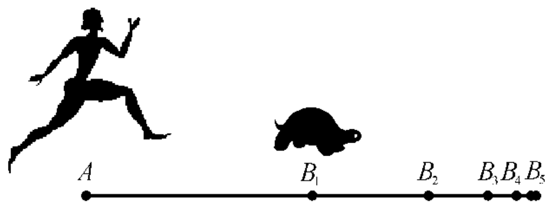


Рис. 4-1.
Ахиллес и черепаха

Получается странный результат. Понятно, что быстрый бегун догонит черепаху. Еще более странен результат другой апории Зенона «Дихотомия» (греч. «деление»), по которой Ахиллес не сможет сделать даже одного шага.

Ведь прежде, чем пройти метр, нужно пройти полметра. Но сначала нужно пройти четверть метра. А перед этим нужно пройти 1/8 метра, 1/16 метра, 1/32 метра... и т.д. Получается, чтобы сделать шаг в один метр нужно пройти бесконечное число отрезков. При этом на прохождение каждого отрезка потребуется время. Но преодоление бесконечного числа временных интервалов займет бесконечность…

Для решения апории «Ахиллес и черепаха» нужно понимать, что, действительно, какое бы *конечное* число отрезков Ахиллес не преодолел, он не догонит черепаху. Чтобы догнать черепаху ему нужно преодолеть *бесконечное* число отрезков. К счастью, длина отрезков все время уменьшается, время на их преодоление тоже уменьшается. Попробуем это время рассчитать. Пусть вначале между Ахиллесом и черепахой 10 метров, примем для круглого счёта скорость черепахи 1 см/с или 0,01 м/с, а скорость Ахиллеса 1 м/с. Первый интервал он преодолеет за 10 секунд. За это время черепаха продвинется на 10 см, т.е. теперь между ними 10 см. Ахиллес преодолеет эти 10 см за 0,1 с. Черепаха продвинется еще на 0,1 см и т. д. Вычисленные значения интервалов пути и времени полезно занести в таблицу.

№ интервала	Время, за которое Ахиллес преодолеет путь до того места, где была черепаха	За это время черепаха успеет проползти
1	10 с	10 см
2	0,1 с	0,1 см
3	0,001 с	0,001 см
4	0,00001 с	0,00001 см
5	0,0000001 с	0,0000001 см
6	0,000000001 с	0,000000001 см

Видно, что сумма затраченного Ахиллесом времени представляет собой бесконечную десятичную дробь, которая равна 10,10101010101… с.

Этот результат можно получить с помощью геометрической прогрессии. Известно, что сумма бесконечной геометрической прогрессии стремится к пределу:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \cdots = a\frac{1}{1-q}, \qquad (4.2)$$

где a и q – константы, $0 < q < 1$.

В задаче с Ахиллесом также получается прогрессия с q = 0,01 и a = 10 с. Значит, Ахиллес пробежит все интервалы за время $a/(1-q)$ = 10/(1-0,01) = 10/0,99 = 10,10101…с, что совпадает с полученным выше результатом.

Таким образом, мы получили, что бесконечное число убывающих отрезков пути (или бесконечное число убывающих временных интервалов) можно преодолеть за конечное время, что и является выходом из апории Зенона. То есть, мы описали движение Ахиллеса и черепахи, и даже нашли время окончания погони.

Но заметьте, что мы не решили, а обошли проблему, высказанную Зеноном: мы не суммировали бесконечное число слагаемых – это невозможно, а указали *предел*, к которому эта сумма стремится. В V веке до н. э. еще не было понятия предела последовательности. Более того, не было четкого понимания, можно ли разбивать отрезки до бесконечности и оперировать бесконечно малыми длинами и интервалами времени. Учение о бесконечно малых величинах ввели только Ньютон и Лейбниц в XVII веке. Мы сейчас не будем давать строгого определения предела, а ограничимся интуитивным пониманием.

Если не разбивать движение Ахиллеса и черепахи на отдельные отрезки, а представить его как непрерывный процесс, то описание погони становится стандартной школьной задачей. По формуле (4.1) за время t Ахиллес пробежит путь $L_A = v_A \cdot t$, черепаха проползёт $L_B = v_B \cdot t$. Начальное расстояние L_0 = 10 метров. Чтобы догнать черепаху Ахиллес должен пробежать путь на L_0 больше черепахи:

$$L_A = L_B + L_0, \quad v_A \cdot t = v_B \cdot t + L_0.$$

Отсюда находим время движения:

$$t = \frac{L_0}{(v_A - v_B)}. \qquad (4.3)$$

Подставим числа: $t = \frac{10}{0{,}99} = 10{,}1010101\ldots(c)$, что совпадает с полученными ранее значениями.

Аналогичным образом решается апория Зенона «Дихотомия». Её решение сводится к нахождению бесконечной суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\frac{1}{2^N}+\cdots \qquad (4.4)$$

Используя формулу (4.2), можно вычислить, что эта сумма стремится к единице.

Заметим, что сумма геометрической прогрессии имеет простую геометрическую интерпретацию – это сумма площадей последовательно разрезаемого единичного квадрата (рис. 4-2). Из построения можно видеть, что:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\frac{1}{2^N}=1-\frac{1}{2^N} \qquad (4.5)$$

При $N \to \infty$ сумма (4.5) стремится к единице. Таким образом, на примере апории Зенона «Дихотомия» можно показать, что бесконечное число убывающих слагаемых дает конечную сумму. То есть, Ахиллес может преодолеть бесконечное число убывающих отрезков за конечное время.

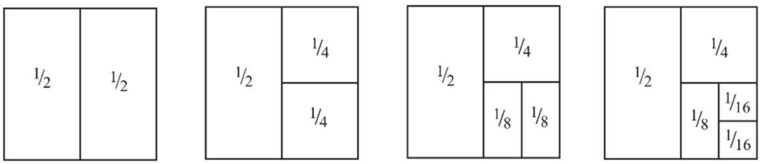


Рис. 4-2.
К вычислению суммы геометрической прогрессии

4.5. Мгновенная скорость

Рассмотрим ещё одну апорию: «Стрела». Где летит стрела? Зенон утверждает, что стрела летит либо там, где она есть, либо там, где её нет, третьего не дано (трудно не согласиться). Но стрела не может лететь, где её нет. Остается, что стрела летит там, где она есть. Но стрела не может лететь там, где она есть, в этом месте она может только покоиться. Вывод: стрела не может лететь. Отсюда

Зенон делает вывод, что движения не существует. На этот сюжет А.С. Пушкин написал стихи.

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее он не смог бы возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.
Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами Солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

Пушкин справедливо замечает, что наши наблюдения не всегда могут быть критерием истины. Понятно, что Зенон видел, как ходят люди и летают стрелы. Но он был первым, кто попытался описать движение математически, и первым понял, что сделать это совсем не просто. По сути, Зенон поставил вопрос: можно ли говорить о скорости стрелы в *данный момент* времени? В физике такую скорость называют *мгновенной*. Понятно, что можно вычислить скорость за любой малый промежуток времени, но как быть со скоростью в данный момент времени? Ведь в формуле (4.1) получается деление на ноль!

Конечно, делить на ноль нельзя, но можно указать способ вычисления мгновенной скорости, уменьшая промежуток времени и наблюдая, к какому пределу стремится средняя скорость. С помощью понятия предела последовательности можно строго определить мгновенную скорость, мы пока удовлетворимся интуитивным пониманием мгновенной скорости, как скорости за малый промежуток времени.

В жизни редко встречается равномерное движение. Чаще приходится иметь дело с неравномерным движением. Для его описания удобно использовать графики.

Глава 5. Графическое представление движения

5.1. Равномерное движение

Рене Декарт
(1596 – 1650)

Для графического представления движения используют прямоугольную систему координат, которая появилась в 1637 году благодаря фундаментальному труду Рене Декарта (1596 – 1650) «Рассуждение о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскивать истину в науках». В третьем приложении к этому труду «Геометрия» изложена система координат, которую сейчас называют *прямоугольной* или *декартовой*. Первый слог в фамилии Декарт – это приставка, показывающая, что он был дворянином. Без дворянской приставки его латинизированное имя – «Картезиус». Одно из его изобретений называется «картезианским водолазом», но об этом речь впереди.

Как Декарт догадался до такой системы координат? Как уже упоминалось выше, ещё пифагорейцы обнаружили, что диагональ квадрата со стороной единица не может быть выражена как отношение двух натуральных чисел. Поэтому развитие геометрии и алгебры шли параллельно. Декарт поставил своей задачей объединить эти науки. Но как описать фигуры с помощью чисел? По легенде однажды Декарт лежал в постели и наблюдал как по стене ползает муха. Стена была выложена маленькими плитками. Декарт подумал, что путь мухи можно представить в виде геометрической фигуры, а можно описать алгебраически, приняв за начало нижний левый угол. Далее нужно отсчитать число плиток по горизонтали и число плиток по вертикали. Так родилась идея прямоугольной системы координат. Первоначально координаты были только положительными, но это уже не столь важно.

По другой легенде Декарт придумал прямоугольную систему координат, сидя в театре. Тогда между посетителями театра постоянно вспыхивали ссоры, кому на каком стуле сидеть, что приводило к потасовкам и даже дуэлям. Декарт придумал расставить стулья рядами и указывать на билетах номер ряда и номер места в ряду. Такая система нумерации мест в театрах существует и поныне.

Благодаря Декарту появилась новая наука – аналитическая геометрия, а математика стала языком физики.

В простейшем виде декартова система координат состоит из двух взаимно перпендикулярных осей. Горизонтальная ось называется абсциссой (лат. *abscissus* – отрезанный), а вертикальная – ординатой (лат. *ordinatus* – упорядоченный). Каждая точка на плоскости задаётся двумя координатами, как показано на рис. 5-1.

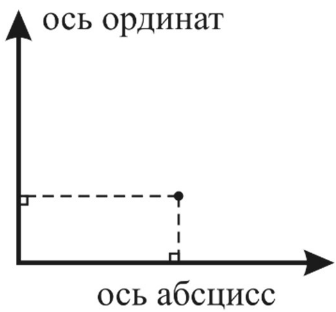


Рис. 5-1.
Декартова система координат

Позже Леонард Эйлер (1707 – 1783) ввёл трёхмерную систему координат с тремя взаимно перпендикулярными осями. Третья ось получила название «ось аппликат» (лат. *applicata* – прилегающая). Но пока мы ограничимся двумя осями.

Система координат кажется очень простой. Почему же до Декарта никто не мог придумать указывать положение точки с помощью координат? Дело в том, что координаты не всегда получаются целыми числами, а десятичные дроби были ещё не в ходу. Если сейчас мы можем сказать, что координата точки, например, равна 0,123 сантиметра, то во времена Декарта нужно было разделить сантиметр (дюйм и т.п.) на 1000 частей и округлить до целого числа – 123. Как раз в это время математики только начали проводить операции с иррациональными числами вида $\sqrt{2}$.

Начнём с равномерного движения вдоль прямой. Будем откладывать по оси абсцисс время (t), а по оси ординат – пройденный путь (L). Если пешеход или автомобиль движется с постоянной скоростью, то зависимость пути от времени будет прямой линией OM, как показано на рис. 5-2.

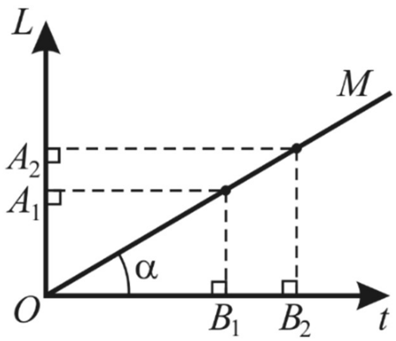


Рис. 5-2.
График равномерного движения

Как из графика найти значение скорости? Скорость *численно* равна отношению длины пути OA_1 ко времени OB_1 или пути OA_2 ко времени OB_2. Из соображения подобия эти отношения одинаковы. Назовём отношение OA_1 к OB_1 (или OA_2 к OB_2) *угловым коэффициентом (наклоном)* прямой OM[3]. Почему мы говорим *численно* равна? Отношение длин отрезков – величина

[3] Заметим, что угловой коэффициент прямой OM равен тангенсу угла α. Но, поскольку читатели ещё могли не изучать тригонометрию, мы будем пользоваться термином «угловой коэффициент».

безразмерная, а скорость имеет размерность «расстояние делить на время». Поэтому угловой коэффициент и скорость имеют разную размерность. Но, если мы условились, в каких единицах мы откладываем значения по оси x (например, в секундах), а в каких единицах по оси y (например, в метрах), то численное значение скорости, выраженное в «метрах в секунду», будет равно угловому коэффициенту прямой *OM*.

В случае неравномерного движения зависимость пути от времени уже будет не прямой, а какой-нибудь кривой линией, как показано на рис. 5-3. При неравномерном движении мы пользуемся понятием средней скорости. Найдём для примера среднюю скорость на интервале времени между t_1 и t_2. Отметим на графике зависимости точки A и B. Им соответствуют величины пройденного пути L_1 и L_2. По определению, средняя скорость при движении от момента времени t_1 до t_2 равна отношению разности расстояний $L_2 - L_1$ к интервалу времени $t_2 - t_1$ или численно равна угловому коэффициенту прямой AB.

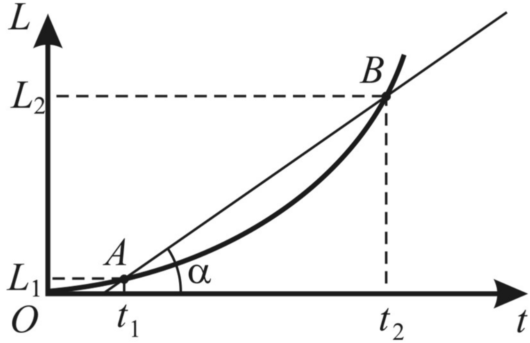


Рис. 5-3.
Вычисление средней скорости с помощью графика

Такой способ определения скорости полезен при анализе графиков. Чем меньше расстояние между точками A и B, тем вычисленная по угловому коэффициенту прямой AB средняя скорость будет ближе к мгновенной скорости. Наиболее точно можно определить мгновенную скорость, по угловому коэффициенту касательной к кривой в точке *A*. Хотя теоретически к каждой точке на гладкой кривой можно провести только одну касательную, практически провести касательную можно только с некоторой точностью. Поэтому вычисление скорости по графику всегда получается приближённо, что разбирается в следующей задаче.

Задача. Ультразвуковой датчик отслеживает движение робота-пылесоса. На графике представлена зависимость расстояния от датчика до робота-пылесоса от времени (рис. 5-4). Можно ли по этим данным найти скорость робота-пылесоса в моменты времени: 0 с, 5 с? Считать, что робот-пылесос двигался по прямой точно на датчик.

Рис. 5-4.
График зависимости расстояния от времени

Решение. Отметим на графике точки *A* и *B*, соответствующие моментам времени $t = 0$ с и $t = 5$ с. Проведём прямую через точку *A* и через некоторую точку *C* вблизи точки *A* (рис. 5-5). Чем ближе точки *A* и *C* – тем точнее будет результат. С учётом толщины линий, можно провести несколько таких прямых. При аккуратном проведении прямая *AC* будет заключена между прямыми *AE* и *AF*, как показано на рис. 5-5. Тогда, рассчитанная по угловому коэффициенту, скорость будет составлять от $\frac{60\ \text{см}}{4{,}1\ \text{с}} = 14{,}6\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$ до $\frac{60\ \text{см}}{4{,}5\ \text{с}} = 13{,}3\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$. Более точно определить скорость по такому графику не получится. Поэтому, когда жюри проверяет решения подобных задач, оно допускает некоторый диапазон правильных значений.

Проведя прямую *GH* через точку *B* и близлежащую точку *D*, мы увидим, что она почти параллельна оси *x*. Следовательно, скорость пылесоса будет близка к нулю. Он как раз совершит разворот и поедет назад.

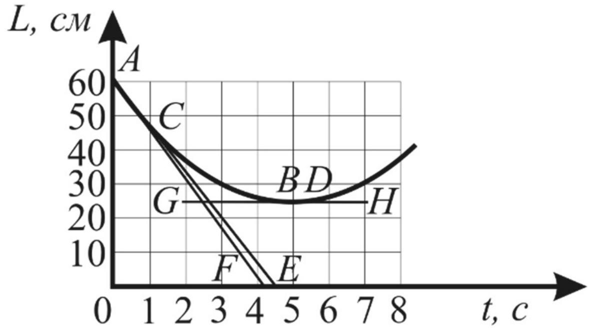


Рис. 5-5.
Вычисление скорости робота-пылесоса

Ответ: в момент времени t = 0 с скорость пылесоса заключена между значениями 13,3 см/с и 14,6 см/с, в момент времени t = 5 с скорость пылесоса равна нулю.

5.2. Равноускоренное движение

При неравномерном движении скорость[4] тела всё время меняется. Величину изменения скорости можно характеризовать

[4] Здесь и далее речь идёт о мгновенных скоростях.

ускорением. Рассмотрим график зависимости скорости от времени. Пусть в некоторый момент времени t_1 тело имело скорость v_1, а в момент времени t_2 – скорость v_2 (рис. 5-6). Определим ускорение, как отношение:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \qquad (5.1)$$

Это будет *среднее ускорение* на интервале времени от t_1 до t_2. По аналогии с мгновенной скоростью можно ввести понятие *мгновенного ускорения*.

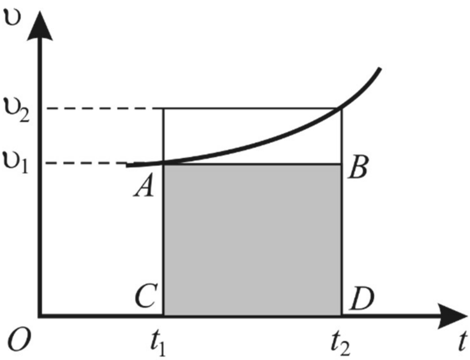


Рис. 5-6.
Неравномерное движение

График зависимости скорости от времени позволяет также вычислить путь, пройденный человеком при неравномерном движении. Для этого нужно выяснить физический смысл площади под графиком. Рассмотрим интервал времени от t_1 до t_2 (рис. 5-6). В момент времени t_1 человек имел скорость v_1, а в момент времени t_2 – скорость v_2, при этом пусть $v_1 < v_2$. Тогда человек пройдёт путь не менее $v_1(t_2 - t_1)$ и не более $v_2(t_2 - t_1)$. Если разность $t_2 - t_1$ мала, то разность скоростей также мала, и пройденный путь можно считать равным величине $v_1(t_2 - t_1)$. С другой стороны, величина $v_1(t_2 - t_1)$, численно равна площади заштрихованного прямоугольника *ABCD*. Разбив движение на множество временных интервалов, равных $t_2 - t_1$ (рис. 5-7), и, уменьшая эти интервалы, в пределе мы получим, что *пройдённый путь численно равен площади под графиком зависимости скорости от времени*. Заметим, что данный способ позволяет вычислить путь для *любой* зависимости скорости от времени. Подробнее этот вопрос разобран в Приложении 2.

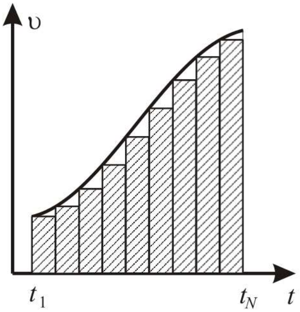


Рис. 5-7.
Площадь под графиком

Воспользуемся этим фактом для расчета пути при равноускоренном прямолинейном движении (ускорение постоянно). Зависимость скорости от времени при равноускоренном движении будет представлять собой прямую линию (рис. 5-8).

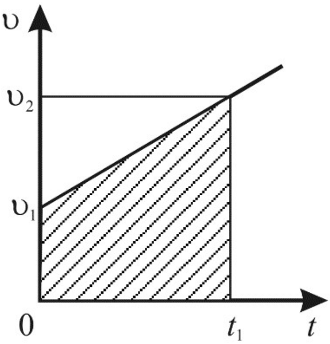


Рис. 5-8.
Вычисление пути при равноускоренном движении

Найдём пройденный за время t_1 путь, как площадь под графиком. Заштрихованная фигура является трапецией. Площадь трапеции равна полусумме длин оснований, умноженной на высоту. Следовательно, путь равен:

$$L = \frac{v_1 + v_2}{2} t_1. \qquad (5.2)$$

Выражая скорость или время по формуле (5.1), можно получить еще 2 способа записи уравнения (5.2):

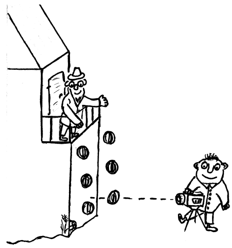
$$L = \frac{v_1 + v_2}{2} t_1 = v_1 t_1 + \frac{a {t_1}^2}{2} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}. \qquad (5.3)$$

Где мы можем наблюдать равноускоренное движение? Один из наиболее простых способов реализации равноускоренного движения – это свободное падение тел, т.е. падение тел при малом сопротивлении воздуха. Ещё Галилей показал, что тела падают равноускорено. Сделаем поправку – это верно вблизи поверхности Земли. Обычно ускорение свободного падения обозначают буквой g. Ускорение свободного падения зависит от широты местности. На широте 55° вблизи поверхности Земли g = 9,815 м/с^2. В большинстве задач для ровного счёта принимают g = 10 м/с^2.

Сделай сам

Как измерить ускорение свободного падения? В век цифровой техники это сделать не очень сложно. Можно взять цифровую камеру, перевести её в режим «видео» и заснять падение крупного предмета, например, резинового мячика. Во многих камерах есть режим быстрой серийной съёмки. Чтобы изображение не выглядело «смазанным», нужно использовать режим скоростной съёмки, на многих камерах этот режим обозначается «спорт». Скоростная съёмка требует хорошего освещения, поэтому делать её лучше в солнечный день. Падающий мячик лучше снимать напротив кирпичной стены или прикрепить к стене размеченный лист картона, чтобы легче было определить пройденный мячиком путь. Отпускать мяч нужно без начальной скорости, можно использовать небольшую стремянку. На месте падения мяча лучше постелить что-то мягкое, чтобы отскочивший мяч не повредил камеру.

После завершения съёмки нужно просмотреть запись в покадровом режиме и измерить на кадрах пройденный мячиком путь. Зная скорость съёмки – обычно 15 или 30 кадров в секунду, можно построить график зависимости пройденного шариком пути от времени. График должен представлять собой параболу. Далее по формуле для пройденного пути: $L = gt^2/2$ можно вычислить ускорение свободного падения g.


Съёмка падения мячей

Следует быть готовым, что полученный результат измерения ускорения из-за сопротивления воздуха будет меньше 9,8 м/с^2. Существуют другие, более точные способы измерения ускорение свободного падения, например, по колебанию маятника, что мы обсудим при изучении колебаний.

5.3. Относительная скорость

Если движутся два пешехода, то можно ввести понятие *относительной скорости*, которая показывает, как изменяется расстояние между ними. Чтобы различать разные виды скоростей, скорость в формуле (4.1) называют *абсолютной скоростью*. В случае относительной скорости вид формулы (4.1) сохраняется, но под L понимают расстояние между пешеходами. Если пешеходы движутся по прямой навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2, то относительная скорость равна:

$$v_{\text{отн}} = v_1 + v_2,$$

как показано на рис. 5-9, слева. Если же один пешеход догоняет другого (рис. 5-9, справа), то относительная скорость равна:

$$v_{\text{отн}} = |v_1 - v_2|.$$

Здесь нужно использовать знак модуля, поскольку расстояние может увеличиваться, может уменьшаться, а скорость по определению – величина не отрицательная.

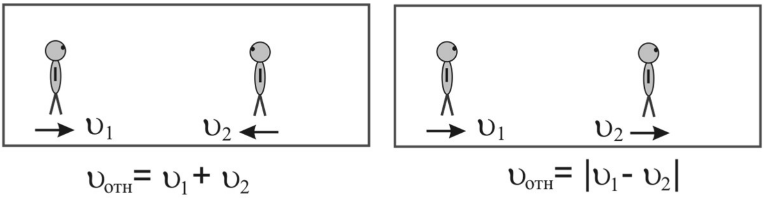


Рис. 5-9.
Относительная скорость

Относительную скорость также удобно использовать, когда мы рассматриваем движение по реке. Пусть скорость лодки *относительно воды* равна v, а скорость течения реки *относительно берега* – u, лодка плывёт по течению, а рядом с ней плывёт плот, который неподвижен относительно воды, как показано на рис. 5-10.

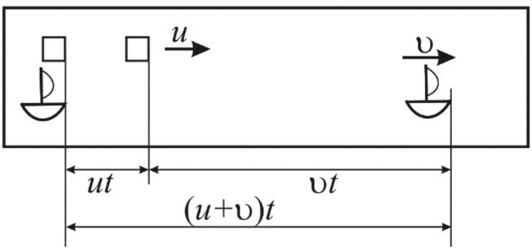


Рис. 5-10.
Сложение скоростей лодки и течения

Тогда за время t плот проплывёт по течению расстояние ut, лодка проплывёт *относительно* плота расстояние vt, *а относительно* *берега* лодка проплывёт $(u+v)t$, т.е. её скорость будет равна $u+v$. Если же лодка плывёт против течения, то её скорость относительно берега будет равна $|v-u|$. Здесь также нужно использовать знак модуля, поскольку скорость реки может быть больше скорости лодки.

Задача. Проплывая под мостом, лодочник уронил в воду шляпу. Через время $t_1 = 1$ час он заметил пропажу, развернулся и поплыл обратно. К счастью, шляпа не утонула, а спокойно плыла по течению. Считая скорость лодочника относительно воды постоянной и равной $v_1 = 5$ км/ч, скорость течения $v_2 = 3$ км/ч, найти через какое время после разворота лодочник встретит свою шляпу. На каком расстоянии от моста это произойдёт? Временем разворота лодки пренебречь.

Решение. Проще всего решать задачу в системе отсчёта, связанной со шляпой. По условию, лодочник плывёт относительно шляпы (относительно воды) со скоростью v_1. После потери шляпы лодочник удаляется от неё в течение времени t_1, а затем он разворачивается и плывёт с той же скоростью v_1 относительно шляпы, и, разумеется, доплывёт до шляпы тоже за время t_1. Таким образом, с момента падения шляпы до встречи пройдёт время $2t_1$. За время $2t_1$ шляпа проплывёт по течению путь $2t_1v_2$.

Ответ: лодочник встретит свою шляпу через время $t_1 = 1$ час, это произойдёт на расстоянии $2t_1v_2 = 6$ км от моста.

Замечание. В общий вид формулы не вошла скорость лодочника, т.е. ответ не зависит ни от скорости лодочника, ни от того плыл ли он по течению или против течения.

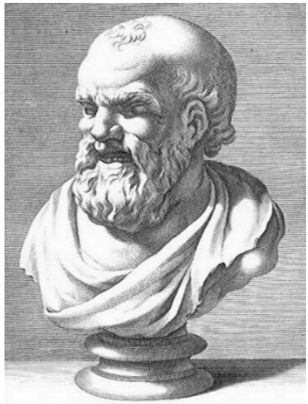
Глава 6. Строение материи

Физика, как наука о природе, не могла обойти вопрос о строении вещества. Разумеется, речь не шла о современном понимании изучения свойств веществ, создания новых материалов и т.д. Древних интересовали самые общие принципы устройства материи. Например, возможно ли бесконечное дробление материи или есть предел, дальше которого дробление невозможно?

На этот вопрос могло быть два принципиально разных ответа. Одни считали, что материя делима до бесконечности, как вода. В их представлении капельку воды можно дробить без ограничения. Наиболее полно эта точка зрения была выражена Эмпедоклом (490 – 430 до н.э.). Он полагал, что всё в мире является смесью 4 стихий: земли, воды, воздуха и огня. О самом Эмпедокле известно мало, в основном – легенды. Жил он в Сицилии, принадлежал к школе пифагорейцев, однако за огласку их учения был изгнан. Свои сочинения Эмпедокл писал в стихах, небольшая часть его поэм «О природе» и «Очищение» дошла до нашего времени. Эмпедокл объявил себя бессмертным и богом, а, чтобы его не разоблачили, бросился в жерло вулкана Этна. Правда, легенда гласит, что боги приняли Эмпедокла не полностью – его медные сандалии были вынесены при извержении вулкана.

Учение о 4-х бесконечно делимых стихиях дошло до Нового времени. Правда к 4-м стихиям Аристотель (384 – 322 до н.э.) добавил ещё особую среду «эфир», а алхимия выявила ещё стихии кислот и щелочей.

Вторая точка зрения, что существует предел делимости материи, возникла благодаря апориям Зенона. Одному из учеников Зенона – Левкиппу (V век до н.э.) захотелось выйти из затруднительного положения, объявив о невозможности бесконечного деления отрезков между Ахиллесом и черепахой. Если существует предел делимости пространства, то расстояние между Ахиллесом и черепахой будет уменьшаться, пока не достигнет этого предела. И за следующее мгновенье расстояние между Ахиллесом и черепахой должно стать нулем, т.е. Ахиллес догонит черепаху.



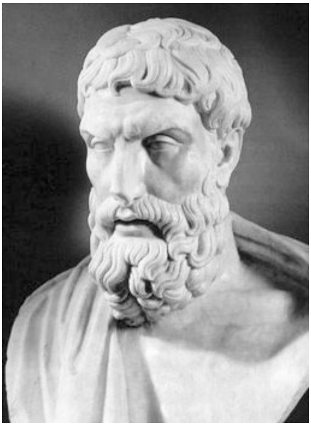
Демокрит (460 – 370)

Из невозможности бесконечного деления пространства следует невозможность бесконечного деления вещества. О Левкиппе почти ничего не известно, но до нас дошли фрагменты трудов его ученика Демокрита (460 – 370 до н.э.). Демокрит родился на севере Греции, в городе Абдеры. Демокрит был из богатой семьи, в юности много путешествовал, учился в Афинах. По легенде он побывал в Египте, Вавилоне, Персии, Индии. На путешествия он истратил все отцовские деньги, по возвращении в Абдеры он предстал перед судом, поскольку пустая трата наследства была наказуема. На суде Демокрит прочитал своё произведение «Великий миространий», и судьи посчитали, что деньги были истрачены не зря. Впоследствии жителей Абдер удивляло, что Демокрит часто беспричинно смеялся и получил прозвище «смеющийся философ». Демокрит говорил, что ему кажется смешной людская суета на фоне мироздания.

До каких пор можно делить материю? По Демокриту существуют мельчайшие частицы – атомы, которые уже нельзя разделить. Атом – по-гречески значит «неделимый», «неразрезаемый». Возможно, на мысль о мельчайших неразрезаемых частицах Демокрита натолкнули частицы песка. Среди песка встречаются очень твёрдые частицы кварца, которые нельзя разрезать ни каменным, ни железным ножом.

Демокрит говорил, что нет ничего, кроме атомов и пустого пространства. Все на свете тела – это комбинации самых разных атомов, которые могут сцепляться и разлетаться.

Учение Демокрита имеет существенный недостаток. Если всё в мире происходит благодаря соударениям атомов, то, в принципе, зная, как движутся все атомы в данный момент, мы можем предсказать как они будут двигаться через секунду, минуту и т.д. Получается, что всё в мире предопределено, в том числе у людей нет свободы воли.



Эпикур (342 – 271)

Эту проблему осознал последователь Демокрита – Эпикур (342 – 271 до н.э.). Он предложил идею атомного «отклонения», т.е. атомы при движении могут изредка произвольно отклоняться от прямолинейного движения, тем самым делая мир не полностью предсказуемым.

В наиболее полном виде учение Эпикура об атомах описано у римского поэта Лукреция Кара (99 – 50 до н.э.) в поэме «О природе вещей» (58 г. до н.э.). К счастью для исследователей поэма дошла до нас целиком.

Лукреций не называет Эпикура по имени, но не скрывает, что описывает учение греков:

> Я не скрываю в душе: рассуждения темные греков
> Очень мне трудно стихами латинскими выразить точно.

Согласно идее атомизма всё в мире состоит из атомов. Лукреций называет их «первичными телами». Он приводит множество наблюдений, «доказывающих» их существование:

> Далее. Запахи мы ощущаем от разных предметов,
> Не замечая того, чтоб к ноздрям подступало что-либо.
> Летнего зноя и холода тоже никак мы не можем
> Зрением воспринимать, как не можем и звуков увидеть...
> Платья, затем, на морском берегу, разбивающем волны,

Влагу приемлют, на солнце же снова они высыхают.
Но каким образом влага воды в них проникла, а также
Как испарила ту влагу жара, – невозможно увидеть.
Так на мельчайшие части свои распадается влага,
Их же никоим мы образом глазом не можем заметить…
Капель паденье дырявит скалу, а сошник искривленный
Плуга железного тупится в пашне для глаз незаметно.
Мы замечаем, что улицы, камней мощенные, часто
Стерты ногами толпы; что стоят у ворот истуканы
Медные, коих десницы с годами становятся тоньше
От целования благочестивого мимо идущих.
Что уменьшилось все это, стираясь, для нас – очевидно.
Но заградила природа от взоров, какие частицы,
В пору какую от этих вещей незаметно отходят.
Видеть нельзя даже с помощью самого острого зренья…

Лукреций (99 – 50)

Надо заметить, что автор точно замечает, что многие вещи происходят незаметно для глаз: мы не видим, говоря современным языком, молекул ароматных веществ, запах которых чувствует наш нос, мы не видим каким образом к нам долетают звуки, не видим как с платьев испаряется влага, как постепенно стираются каменные ступени, незаметно тупятся острые железные предметы и др. Уменьшение толщины медных статуй (истуканов) можно заметить по тому, что некоторые места медных (бронзовых) статуй ярко блестят, в то время как в целом статуя лишь тускло отсвечивает. Обычно это происходит, когда много людей трогают эти места статуй руками «на счастье», постепенно полируя их до блеска.

Однако, указанные Лукрецием примеры, строго говоря, не доказывают отсутствия бесконечной делимости, поскольку они могут быть объяснены наличием четырёх бесконечно делимых стихий.

Лукреций подчёркивает идею Эпикура, что при движении атомы должны отклоняться, чтобы не было предопределённости, а была возможность свободы воли:

> Надобно знать тебе также и то в настоящем предмете,
> Что, когда тельца первичные вниз в пустоту упадают
> Вследствие собственной тяжести, то в неизвестное время
> И в неизвестных местах отклоняются чуть-чуть с дороги…
> Далее, если б движения все были связаны вместе,
> В определенном порядке одни из других возникая…
> То отчего у созданий живых происходит свобода?

Принцип неопределённости измерений параметров системы существует и в современной квантовой физике, что мы обсудим при её изучении.

С помощью первичных тел Лукреций описывает природу действия магнита:

> Мне остаётся сказать, по какому закону природы
> То происходит, что камень притягивать может железо.
> Камень же этот по имени месторожденья магнитом
> Назван был греками, так как он найден в пределах Магнетов.
> Люди весьма удивляются камню такому…

По Лукрецию, магнитные камни, источают особые первичные тельца, которые вытесняют воздух между магнитом и железными предметами, а поскольку природа боится пустоты, то магнит и железный предмет устремляются друг к другу. Не будем с высоты XXI века смеяться над взглядами древних, лучше отдадим должное их стремлению к познанию мира, имея столь примитивные возможности для его исследования. Заметим, что в этом отрывке Лукреций указывает на происхождение слова «магнит». Подробнее мы обсудим этот отрывок, когда дойдём до магнетизма.

Насколько маленькие размеры имеют атомы? О конкретных размерах Лукреций не говорит, указывая, что они настолько мелкие, что не видны глазом. Насколько мелкие предметы мы видим невооружённым глазом? Например, мы видим человеческий волос. Его толщина колеблется от 50 до 150 микрон (1 микрон = 10^{-6} метра). То есть, атомы по Лукрецию должны быть ещё меньше. Но вряд ли он представлял себе, насколько маленькими являются атомы.

Оценим размеры и массу[5] атомов, исходя из знаний сегодняшнего дня. Известно, что 18 г воды[6] содержат $6{\cdot}10^{23}$ молекул (число Авогадро). Зная это, несложно рассчитать, что одна молекула воды имеет массу $\frac{18\ \text{г}}{6\cdot10^{23}} = 3 \cdot 10^{-2}$ г или $3{\cdot}10^{-26}$ кг. Чтобы грубо оценить размер молекулы воды, найдём какой она занимает объём, считая, что молекулы в воде упакованы плотно и вода мало сжимаема. Плотность воды равна 1 г/см^3, то есть 18 г воды занимает 18 см^3. Тогда объём одной молекулы составляет $\frac{18\ \text{см}^3}{6\cdot10^{23}} = 3 \cdot 10^{-23}$ см^3 или $30{\cdot}10^{-30}$ м^3. Не вдаваясь в детали строения молекулы воды, оценим её размер, считая молекулу воды кубом. Извлечём кубический корень из этого числа – получится примерно $3{\cdot}10^{-10}$ м или 0,3 нм (1 нанометр = 10^{-9} метра). Разумеется, частицы такого размера нельзя увидеть не только глазом, но даже в сильный микроскоп.

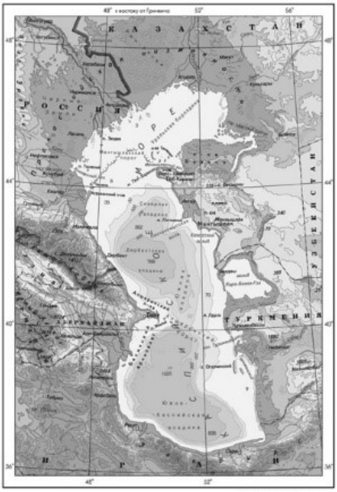
Конечно, сегодня мы понимаем под атомом нечто совсем иное, чем древние греки. Атомы уже не являются неделимыми. Впрочем, механически их разделить нельзя, так что они остаются «неразрезаемыми». Также сегодня нельзя сказать, что между атомами существует только пустое пространство. Всё пространство заполнено электромагнитными и гравитационными полями, но не будем забегать вперёд.

---

[5] Здесь и далее под значением массы тела мы будем понимать результат взвешивания на рычажных весах с гирьками.

[6] 18 грамм составляет один моль воды, но если понятие моля незнакомо читателям, то можно просто принять как факт, что число Авогадро относится к 18 граммам воды, не вдаваясь в детали почему выбрали именно 18 грамм.

Чтобы представить, насколько велико число молекул, решим следующую задачу.



Каспийское море

Задача. Представим себе, что мы пометили все молекулы в стакане воды (200 г) и вылили эту воду в Каспийское море. Пусть вода за год полностью перемешалась. Возьмем из Каспийского моря стакан воды. Сколько там окажется «помеченных молекул»? Объём Каспийского моря принять равным 78 000 кубических километров.

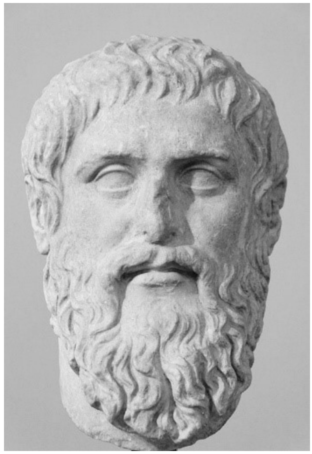
Решение. Вычислим число молекул в стакане воды. Известно, что 18 грамм воды содержат $6 \cdot 10^{23}$ молекул, тогда 200 грамм воды содержат: $\frac{200}{18} \cdot 6 \cdot 10^{23} \approx 67 \cdot 10^{23}$ молекул.

Объём Каспийского моря по условию равен $78 \cdot 10^3$ км^3 или $78 \cdot 10^{12}$ м^3 или $78 \cdot 10^{18}$ см^3.

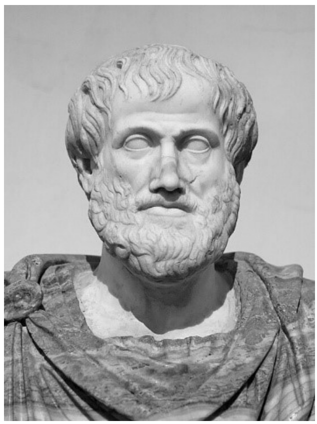
Таким образом, каждый кубический сантиметр будет в среднем содержать: $\frac{67 \cdot 10^{23}}{78 \cdot 10^{18}} \approx 0{,}86 \cdot 10^5 = 86000$ меченных молекул. В стакане их будет в 200 раз больше – примерно 17 миллионов молекул!

Ответ: около 17 миллионов меченных молекул.

Глава 7. Аристотель и античная картина мира


Платон (428 – 348)

Первую цельную картину мироздания создал Аристотель (384 – 322 до н.э.). Он внёс вклад во многие области античной науки и искусства: физику, метафизику (философию), биологию, логику, этику, эстетику, поэзию, риторику, психологию, лингвистику, экономику, политику и др. Родился Аристотель в городе Стагира на севере Греции, поэтому иногда его называют «Стагирит». В возрасте 17 лет он приехал в Афины и обучался в академии Платона. После смерти Платона (348 г. до н.э.) он покинул Афины и вскоре стал наставником юного Александра Македонского по просьбе его отца Филиппа II. После смерти Филиппа (335 г. до н.э.) Александр Македонский становится царём, а Аристотель возвращается в Афины и основывает свою школу недалеко от храма Аполлона Ликейского. Школа получает название «Ликей», отсюда происходит современное название «лицей» для особых школ. После смерти Александра Македонского (323 г. до н.э.) в Афинах началось восстание против македонской власти, Аристотель бежит из Афин и через год умирает.


Аристотель (384 – 322)

Рассматривать систему мира Аристотеля нужно, конечно, не с точки зрения высоты современных знаний, а насколько она была непротиворечива и насколько хорошо описывала известные в то время явления. Более того, физика Аристотеля ЛУЧШЕ описывала ВИДИМЫЙ мир, чем современная. Действительно, *глазами* мы видим, как Солнце движется по небу, а не как вращается Земля у нас под ногами. Вращение Земли нужно не увидеть глазами, а получить путём логических рассуждений, о чём речь впереди.

Аристотель и Платон в центре фрески Рафаэля, Ватикан (1511)

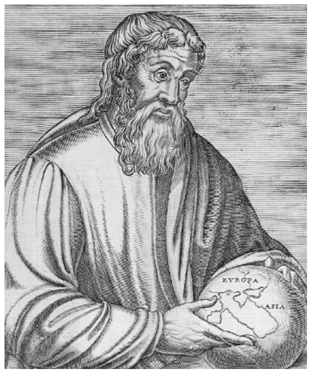
Основное положение Аристотеля – мир представляет собой красоту и совершенство. Благоговение перед красотой типично для мышления античности. Мы уже упоминали, что Пифагор считал, что в основе мира лежит гармония чисел. Учитель Аристотеля – Платон (427 – 347 до н.э.) в своем диалоге «Протагор» описывает разговор философа Протагора со слушателями. Когда Протагору задали вопрос, тот спросил слушателей, хотят ли они, чтобы он привёл рассуждения по этому вопросу или рассказал миф? Нам сейчас такая постановка вопроса кажется странной, но для того времени красота являлась своего рода критерием истинности суждения.

Аристотель считал мир «космосом». Но у древнего слова «космос» было немного другое значение. Оно происходит от греческого «космео[7]» – «украшаю». Для древнегреческих мыслителей космос – это противопоставление хаосу, гармония, возникшая из первоначальной хаотической материи. Именно веру в гармонию

[7] От «космео» – «украшаю» происходит также слово «косметика». Поэтому слова «космический» и «косметический» созвучны. Рассказывают, что, когда первая в Германии женщина-физик Л. Мейтнер (1878—1968) защищала свою докторскую диссертацию «Проблемы космической физики», один журналист, посчитав, что женщина не могла заниматься столь серьёзной темой, в публикации в газете «поправил» название на «Проблемы косметической физики».

мира Аристотель положил в основу своей физики. Если согласиться с этим основным положением, то дальнейшие рассуждения Аристотеля поражают своей логичностью и последовательностью построения гармонии космоса.

В центре космоса Аристотель расположил Землю. Приятно считать себя центром космоса. Какая фигура является наиболее совершенной? По Пифагору наиболее совершенной фигурой является шар, поскольку у него все направления одинаковы. Пифагор утверждал, что Земля является шаром, исходя из идеи совершенства. Сегодня такое «доказательство» нас бы не удовлетворило, но оно вполне логично вытекает из основного положения о совершенстве мира. Нужно заметить, что Аристотель приводит ещё и астрономические доказательства сферичности Земли: 1) изменение картины звездного неба при перемещении по Земле (на север или юг), 2) тень от Земли при лунном затмении всегда имеет форму дуги окружности. Эти доказательства выглядят убедительно даже с точки зрения современной науки.

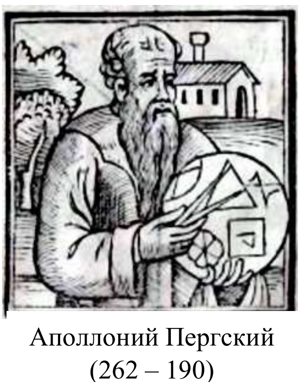


Страбон
(64 до н.э. – 23 н.э.)

В I веке до н.э. географ Страбон (около 64 до н.э. – 23 н.э.) приведёт ещё доказательство сферичности. Он обратит внимание, что при наблюдении за приплывающим кораблём сначала видны паруса и мачты корабля над горизонтом, а только потом появляется корпус. Данное свойство сферичности Земли иллюстрируется на рис. 7-1. Если бы Земля была плоской, то корабль бы появлялся на горизонте целиком. Чтобы это заметить (без бинокля) нужно обладать хорошим зрением. Возможно, Страбон не был первым, кто заметил это явление, но именно он его описал и объяснил. Аристотель жил задолго до Страбона, и такое доказательство сферичности Земли не приводит.

Рис. 7-1.
Доказательство сферичности Земли

Следуя античной традиции, Аристотель разделяет мир на подлунный: Землю и всё, что есть на ней, и надлунный. Подлунный мир несовершенен, в нём всё подвержено старению и разрушению. Зато все небесные тела совершенны и неизменяемы. Следовательно, Солнце и Луна являются шарами, причём идеальными. Они являются особыми эфирными телами. Наблюдения показывают, что Солнце, Луна и ещё несколько светящихся точек, называемых планетами, движутся по небесному своду. Как могут двигаться тела в совершенном мире? Конечно, только по совершенным линиям, т.е. по окружностям, причем это движение равномерное, будет продолжаться вечно и не требует ничьего воздействия.



Аполлоний Пергский
(262 – 190)

В этом месте система Аристотеля столкнулась с проблемой. Наблюдения показывали, что планеты движутся не совсем по окружностям и не совсем равномерно. Но не отказываться же из-за этого от такой прекрасной системы мира! Была предложена система вложенных сфер, которая объясняла наблюдаемые явления. Но этого оказалось недостаточно. Через 100 лет Аполлоний Пергский (262 – 190 до н.э.) предложил, чтобы по окружности двигалась бы не сама планета, а дополнительный центр, планета же должна вращаться вокруг него по окружности, называемой эпициклом (рис. 7-2). Конечно, это уже не так просто и красиво, как хотелось бы, зато позволяет точно определять положения планет на небе, и главное, всё движется строго по совершенным окружностям.

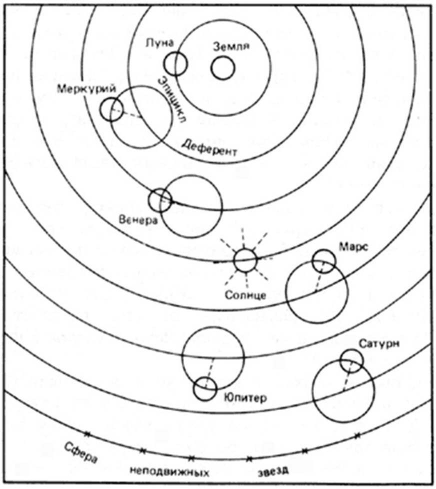


Рис. 7-2.
Представление о строении мира в античности

На Земле у Аристотеля тоже всё просто и понятно: все тела стремятся занять отведённое им место во всеобщей гармонии: тяжёлые (камни) стремятся вниз, к центру космоса (он же центр Земли), а лёгкие (дым костра) – вверх. Всё логично. Движения тел к своему месту Аристотель назвал «естественными». Живые организмы могут двигаться благодаря особой «живой силе». Они могут также двигать предметы неживой природы, это – насильственные движения.

Здесь у Аристотеля возникла существенная проблема. Хорошо известно, что брошенный камень летит даже после того, как рука его отпустит. Какова причина этого движения? Инерция? У Аристотеля нет и не может быть инерции в нашем понимании. Согласно Аристотелю, неживые тела могут совершать только естественные движения. Сегодня может показаться странным, что в древности отвергали такое понятное явление, как инерция. Но, с другой стороны, ведь мы каждый день видим множество примеров того, что тела двигаются, пока на них оказывается воздействие, и быстро останавливаются, как только это воздействие прекращается. Есть бензин – машина едет, нет бензина – машина стоит, причём тут какая-то инерция, – рассуждает один из героев книги Ярослава Гашека «Похождения бравого солдата Швейка». Стоит ли удивляться, что в далёкой древности про инерцию не говорили. Ведь её нельзя увидеть глазами, как мы видим Солнце, звёзды, падение камней. К понятию инерции можно прийти только путём анализа специальных экспериментов, которые в древности не ставили, ограничиваясь наблюдением того, что видели в обычной жизни.

Бравый Швейк,
С. Петербург

Аристотель решает эту проблему и находит причину для движения. Камень движется, потому что... движение поддерживает воздух! Когда человек бросил камень, то раздвинул перед ним воздух. За камнем воздух схлопывается, ибо *природа боится пустоты*. Схлопывание воздуха и является причиной дальнейшего движения камня.

Сомневаетесь? В том, что «природа боится пустоты», несложно убедиться. Когда Вы пьёте через соломинку сок или молочный коктейль, то втягиваете ртом воздух. Налицо причинно-следственная связь: Вы удаляете из соломинки воздух, и сок поднимается по ней вверх. Отсюда логично сделать вывод: природа боится пустоты, а потому сок занимает место удаленного воздуха. Как ни странно, но это объяснение удовлетворяло учёных вплоть до середины XVII века, но об этом речь впереди.

Пустота у Аристотеля вообще объявлена вне закона. Движение в пустоте невозможно, ибо в ней нет причин ни для начала движения, ни для продолжения движения, ни для остановки. А раз нет пустоты, то нет и атомов, а всё заполнено четырьмя стихиями, и ещё есть стихия эфира для небесных тел.

Аристотель сделал великий шаг – он отделил науку от магии. Люди древнего мира верили в магию: приворотное зелье, наведение порчи и др. мистические силы. Это хорошо описано в книгах того времени, но нам не обязательно читать античных писателей. Достаточно открыть книги Н.В. Гоголя и подивиться тому, как не робкого десятка казаки, побывавшие в сражениях, вдруг ближе к ночи начинают побаиваться чертей, ведьм и прочей нечисти. Аристотель постановил, что незримым сущностям не место в науке, нужно опираться только на наблюдения и логические рассуждения.

Аристотеля называют отцом логики. Он сформулировал многие логические законы, использовал индукцию и дедукцию. Его рассуждения просты и безупречны, а выводы полностью соответствует повседневному опыту. Как доказать, что Земля неподвижна? Вдруг она движется относительно центра мира? Во-первых, неподвижность Земли следует из многочисленных наблюдений: тяжёлые тела, которые (по Аристотелю) должны двигаться к центру мира, всегда падают вертикально, в одно и тоже место. Следовательно, Земля неподвижна относительно центра мира. Логично?

Во-вторых, есть более весомый для нас аргумент: если бы Земля двигалась, картина звёздного неба менялась бы, а мы этого не наблюдаем. С последним рассуждением сложно спорить. Аристотель не мог представить, насколько далеко от нас находятся звёзды, и то, что мы не замечаем изменение положения полярной звезды (параллакс) объясняется удалённостью звёзд.

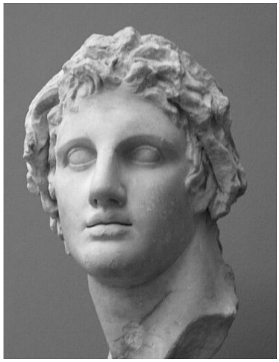
У Аристотеля нет силы притяжения Земли. Эта была бы какая-то невидимая сущность, наподобие приворотного зелья, которой место в магии, но не в физике. Тем более нелепо для Аристотеля выглядело бы предположение, что Земля притягивает Луну. Разве кто-то видел канат от Земли до Луны? Он решительно отвергал незримые сущности.

Представим на секунду, что Аристотель попал бы в наше время. Удивился бы он, как далеко ушла современная физика? Скорее, он удивился бы тому, как мало мы продвинулись в понимании гармонии космоса. «Удалось ли узнать, – спросил бы Аристотель, – ЗАЧЕМ Солнце обращается вокруг Земли (или Земля вокруг Солнца)?» Нет? Как же мало продвинулась физика за 2000 лет!

Физика Аристотеля — это, прежде всего, попытка раскрыть гармонию космоса: всё имеет причины, всё имеет цель. Сегодня наука не стремится понять, с какой целью Земля обращается вокруг Солнца. Учёные открывают законы, которые описывают явления, но не стремятся ответить на вопрос, почему эти законы такие, а не другие, какая у них цель? Нас интересует не ДЛЯ ЧЕГО, а КАК движется Земля.

Почему же сегодня мы задаём природе иные вопросы, чем Аристотель? Древние греки были политеистами (от греч. «поли» – «многочисленный, много» и «теос» – «Бог, божество»), для них природа была полна живых существ. Каждое дерево имело свою дриаду, а река и ручей – свою наяду. Каждая роща, каждый холм имели своё божество – покровителя. С точки зрения античных мыслителей необходимо изучать нетронутую человеком природу, любое вмешательство человека (проведение экспериментов) есть насилие, которое лишь мешает постижению сути вещей. В античной физике НЕТ ЭКСПЕРИМЕНТОВ в нашем понимании этого термина, только наблюдения.

Перед античной физикой не стояла задача способствовать техническому прогрессу. Физика изучала мир, чтобы раскрыть совершенство мира. В Средние века астрономия и математика считались прикладными науками, а физику преподавали на богословских факультетах. В этом смысле древнегреческий учёный Архимед (287 – 221 до н.э.) представлялся современникам не физиком, а механиком, т.е. мастером по изготовлению кораблей и катапульт, а физиками были Эмпедокл, Демокрит, Аристотель и др., объясняющие устройство мира. Изменение отношения человека к природе произойдёт в конце средних веков, но об этом речь впереди.



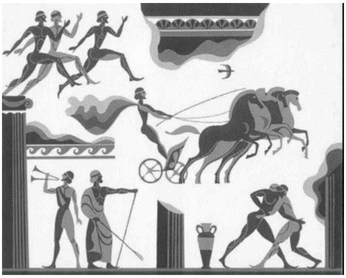
Александр Македонский (356 – 323)

Удалось ли Аристотелю создать стройную картину мировой гармонии? В целом – да. Его картина мира просуществовала 2000 лет до эпохи Ньютона. Конечно, были отдельные проблемы. Одна из них – это объяснение приливов и отливов. В Эгейском море приливы и отливы незаметны, а потому греческие учёные не знали о них, и Аристотель не включил их в свою гармонию мира. Но когда самый известный ученик Аристотеля – Александр Македонский (356 – 323 до н.э.) дошёл до Персидского залива, македонцы обнаружили странное явление: дважды в сутки море набегало на берег и дважды отступало назад. Это было не просто интересное наблюдение. Македонцы описали это как невыразимый ужас: они хотели встать на якорь вблизи берега, вдруг море ушло и оставило корабли на отмели, а затем оно вернулось и волны разбили корабли в щепки. В книге «Диалог…» (1632) Галилей приводит легенду, что, узнав о приливах и отливах, Аристотель долго сидел на берегу моря, пытаясь понять причину этого явления, но не нашёл решения. В отчаянии, что его система мира рушится, Аристотель бросился в море. Будем надеяться, что это только легенда.

Глава 8. Вес и масса. Международная система мер

Аристотель делил движения на естественные, которые происходят сами по себе, и насильственные, которые происходят под внешним воздействием. При этом воздействие не обязательно должно быть прямым. Когда мы рубим дрова, то мы толкаем топор, а топор рубит бревно, таким образом, мы воздействуем на бревно.

Назовём силой количественную меру взаимодействия между телами.



Олимпийские игры

Как узнать, насколько силён человек? Первое, что приходит в голову – это померяться силами, только, разумеется, не с помощью драки. Уже древние греки поняли, что меряться силами лучше в спорте, чем в бою. В VIII веке до н.э. в Греции были учреждены Олимпийские игры, которые проводились раз в четыре года. Это время имело специальное название – «экихирия». На время игр между всеми греческими городами-государствами прекращались войны. Даже разбойники, опасаясь гнева Богов, не смели нападать на путников, спешивших на Олимпийские игры. Игры проводились с перерывами более тысячи лет (по IV век н.э.). В конце XIX века проведение Олимпийских игр возобновилось. Организаторы дали играм девиз: «*Citius, altius, fortius*», что на латыни значит: «Быстрее, выше, сильнее».

Можно устроить в классе соревнование, например, по армрестлингу и узнать у кого руки сильнее. Однако подобные измерения силы носят *относительный* характер. То есть, можно узнать свою силу по *отношению* к другому человеку. Но нельзя узнать, например, насколько сильнее человек стал за лето, поскольку одноклассники тоже могли набраться сил. Тем более нельзя сравнить силу людей, живущих в разных местах или в разных веках. Например, кто сильнее, олимпийские чемпионы в наше время или победители олимпиад в Древней Греции? Для ответа на это вопрос нужно уметь измерять силу *абсолютно*, то есть, независимо от силы других людей.

Олимпийский чемпион Милон

Можно измерить силу, подняв какой-нибудь груз, например, гирю или штангу. Таким способом можно сравнить силу людей, живущих в разные эпохи. Например, существует легенда, что один из учеников Пифагора – Милон из Кротона (VI век до н.э.) для укрепления мышц каждый день обносил вокруг дома телёнка. Телёнок постепенно рос, и вскоре Милон поднимал и носил большого быка. Накачав мышцы, Милон шесть раз завоевал звание олимпийского чемпиона, став самым известным борцом античности. Учитывая размеры быка, Милон мог бы стать чемпионом – тяжелоатлетом и в наше время.

Какую силу мы измеряем, поднимая грузы? Назовём эту силу *весом тела*.

Вес – это сила, с которой тело действует на опору или подвес.

Для измерения веса тела используют *весы*. В наше время существуют самые разнообразные электронные весы, но в древности использовали рычажные весы, которые часто называют «весами Архимеда», хотя похожие «весы Осириса» известны были ещё в Древнем Египте (рис. 8-1, слева). Под рычажными или весами Архимеда обычно понимают две одинаковые чаши, которые подвешивают на твёрдой перекладине, а перекладину подвешивают за её центр, как показано на рис. 8-1, справа.

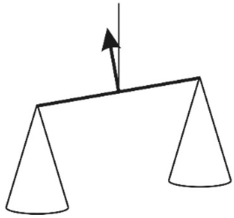


Рис. 8-1.
Весы Осириса (слева), «весы Архимеда» (справа)

Несмотря на простоту, такие весы позволяют взвешивать с большой точностью. Существуют и другие виды рычажных весов с гирями. Их объединяет общий принцип: нужно поставить столько гирек, чтобы гирьки оказывали такое же воздействие на весы, что и взвешиваемый груз.

Однако здесь мы сталкиваемся с проблемой, что обычно говорят не о *весе*, а о *массе* гирек. Почему так делают и что такое масса?

Дело в том, что вес тела не постоянен. Если мы полетим на космическом корабле, то при старте ракета летит с большим ускорением, возникает *перегрузка*, космонавты вдавливаются в кресло, их вес многократно увеличивается, затем наступает *невесомость* – космонавты свободно парят в воздухе, никто ни на что не давит – вес нулевой. Необязательно садиться в ракету. Даже на карусели вы можете почувствовать, что при быстром вращении сила, с которой вы давите на кресло, увеличивается. Следовательно, ваш вес растёт.

Иметь дело с переменной величиной не очень удобно. Поэтому в физике вводят *массу* – величину, постоянную для этого тела. Современное понятие массы появилось после открытия законов Ньютона. Поскольку мы не дошли до законов Ньютона, то пока не будем давать строгого определения понятию массы, а ограничимся тем, что будем понимать под массой величину, которую мы можем измерить путём взвешивания тела на весах Архимеда (или им подобным).

Но как связать вес груза и массу гирек? Ведь мы пока даже не договорились, в каких единицах измеряют массу гирек.

Сначала нужно произвольным образом выбрать какой-то предмет в качестве *эталона*, а затем по этому эталону сделать любое число гирек. В разные времена для взвешивания использовались пуды, золотники, фунты… и др. Каждое государство вводило свою систему мер. Это было очень неудобно для торговли, поскольку не было единой системы мер. В конце XVIII века во Франции была создана метрическая система мер и весов, которая в 1799 году декретом Наполеона стала обязательной на всех завоёванных территориях. Поскольку в результате Наполеоновских войн Франция на короткое время контролировала большую часть Европы, то метрическая система распространилась во всей Европе кроме Англии и России, которые Наполеон не завоевал. Россия присоединилась к метрической системе после революции 1917 года.

Эталон метра

Эталон килограмма

За один метр была взята 1/40 000 000 часть земного меридиана. Эталон времени – одна секунда был выбран из астрономических наблюдений: суточное вращение Земли – 24 часа, в часе – 3600 секунд. За единицу массы – один килограмм была выбрана масса одного литра (кубического дециметра) воды[8]. Эталон массы представляет собой цилиндр диаметром и высотой 39,17 мм из платиноиридиевого сплава. Он хранится в Международном бюро мер и весов под Парижем вместе с эталоном длины – метром. Метрическая система стала использоваться в большинстве стран

[8] при температуре 4ºC

мира. В 1960 году ей было присвоено наименование «СИ» (система интернациональная). Сейчас эталоны длины и массы в международной системе СИ определяют по-другому, но не будем забегать вперёд.

Получив эталон в один килограмм, на его основе можно сделать гирьки меньших масс – граммы, миллиграммы и др. С них можно снять очень точные копии и хранить в каждом государстве для производства нужного числа гирек.

Взвешивание даже на простых весах Архимеда при наличии хороших разновесов позволяет достичь точности тысячных долей грамма. Однако точное взвешивание – очень длительный процесс, поскольку нужное количество гирек долго подбирать. Кроме того, приходится долго ждать, пока весы перестанут раскачиваться и придут в равновесие. Для очень точных взвешиваний весы помещают в специальный стеклянный сосуд, чтобы малейшие потоки воздуха, в том числе дыхание человека, не мешало весам прийти в равновесие. А можно ли для ускорения процесса обойтись без гирек? Можно, используя пружинные весы (рис. 8-2). С помощью пружинных весов можно взвесить намного быстрее, но, к сожалению, не так точно.

Действие пружинных весов основано на экспериментальном факте: удлинение пружинки пропорционально весу тела. Убедиться в этом можно используя, например, школьный *динамометр* (от греч. δύναμις – «сила» и μέτρεω – «измеряю»), т.е. прибор для измерения силы. Динамометр крепится в штативе и к нему подвешивается грузик массой 100 грамм (рис. 8-2). Пружинка динамометра должна растянуться на одно деление (чуть позже мы обсудим в каких единицах измеряет динамометр). Если подвесить ещё такой же грузик, то пружинка растянется ещё на одно деление. Также произойдёт с 3-м, 4-м и 5-ми грузиками. Больше 500 грамм взвешивать нельзя (в зависимости от конструкции динамометра).

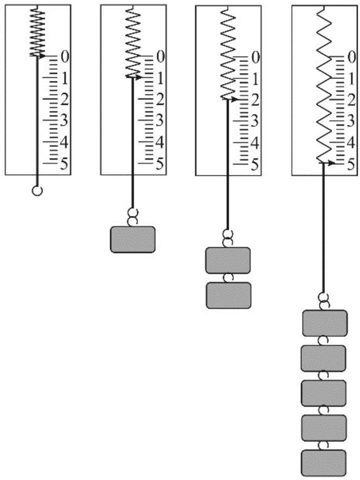


Рис. 8-2.
Пружинные весы (динамометр).
Растяжение пропорционально весу гирек

Подобный эксперимент можно провести с любыми пружинными весами, спортивным пружинным эспандером и т.п. Разумеется, у любой пружинки есть предел, выше которого её нельзя нагружать, иначе растяжение станет необратимым – пружинка не вернётся в исходное состояние.

Данное свойство пружин было открыто английским физиком Робертом Гуком (1635 – 1703), который много занимался совершенствованием технологии изготовления пружин и изобрёл спиральную пружину для часов.

Сегодня широко используют электронные весы. В них применяют *тензодатчик* (от лат. *tensus* – напряжённый) – кристалл, меняющий свои электрические свойства при надавливании на него. Не вдаваясь в технические подробности, заметим, что электронные весы сочетают быстроту и точность взвешивания.

Но всё же существует *принципиальная разница* между весами Архимеда и пружинными или электронными весами.

Вес груза покажут пружинные или электронные весы. С помощью рычажных весов Архимеда можно измерить *массу,* а не вес взвешиваемого груза. Рассмотрим это на примере.

На Луне сила притяжения меньше, чем на Земле, поэтому вес тоже будет меньше. Экспериментально установлено, что вес тел на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле. Пружинные весы на Луне покажут, что наш вес стал меньше в 6 раз. А что покажут весы с гирьками? Вес гирек на Луне тоже изменится, поэтому, чтобы уравновесить нас на Луне, нужно *такое же* количество гирек, что и на Земле, т.е. весы покажут, что наша *масса не изменилась*. Когда космический корабль ускоряется при старте, то пружинные весы покажут, что вес тела изменился, а рычажные останутся в равновесии. Если бы весы можно было взять на карусель, то пружинные весы также показали бы увеличение веса, а рычажные сохранили бы равновесие.

Можно ли связать массу тела и его вес? Мы выяснили, что вес зависит от того, как сильно планета притягивает тело. На Луне вес тел в 6 раз меньше, чем на Земле. Но ускорение свободного падения, которое мы обсуждали выше, на Луне тоже в 6 раз меньше, чем на Земле. Случайно ли это? Точные измерения показывают, что на Земле ускорение свободного падения зависит от широты местности и меняется от 9,78 м/с^2 на экваторе до 9,82 м/с^2 на северном (или южном) полярном круге, т.е. увеличивается на 0,4%. А что будет с весом? Точные весы показывают, что вес тела на северном или южном полярном круге увеличивается на 0,4% по сравнению с весом на экваторе. Получается, что произведение массы тела (которую мы определили по рычажным весам Архимеда) на ускорение свободного падения пропорционально показанию пружинных или электронных весов.

Определим силу тяжести F_T как произведение:

$$F_T = mg, \qquad (8.1)$$

где m – масса тела, а g – ускорение свободного падения в данном месте планеты. Формула (8.1) верна только для тел, неподвижных относительно планеты. Как измерять силу тяжести на ускоряющемся космическом корабле или на карусели обсудим позже.

Заметим, что сила тяжести должна быть равна противоположной силе, т.е. силе, с которой опора или подвес действуют на груз. Если бы сила реакции опоры была бы меньше силы тяжести, то груз просто вдавил бы эту опору в землю или сломал бы её.

Мы пока не договорились, в каких единицах мы будем измерять силу. Силу в международной системе СИ измеряют в *ньютонах* в честь английского физика Исаака Ньютона (1643 – 1727). Как следует из формулы (8.1) гирька массой один килограмм весит на экваторе 9,78 ньютонов, на северном (или южном) полярном круге 9,82 ньютонов, а на Луне примерно 1,6 ньютона.

Пружинные весы измеряют силу тяжести, поэтому их правильно градуировать в единицах силы – ньютонах. Например, рассмотренный выше школьный динамометр проградуирован в ньютонах. Но пружинные весы не очень точны, разницу в весе на экваторе и полюсах обнаружить вряд ли получится. Поэтому пружинные весы часто градуируют не в ньютонах, а в граммах, принимая среднее значение g = 9,81 м/с^2.

Более точные измерения показывают, что ускорение свободного падения меняется с высотой: чем выше мы поднимаемся над Землей, тем меньше Земля притягивает тела, тем меньше ускорение свободного падения. Это следовало ожидать. Ведь в космосе, вдали от Земли, её притяжение будет пренебрежимо мало. Впрочем, радиус Земли равен примерно 6400 км, и даже на самых высоких горах уменьшение величины ускорения свободного падения малозаметно. Поэтому при решении задач мы будем пользоваться приближённым значением g = 10 м/с^2.

Глава 9. Закон Архимеда

9.1. От плота к кораблю

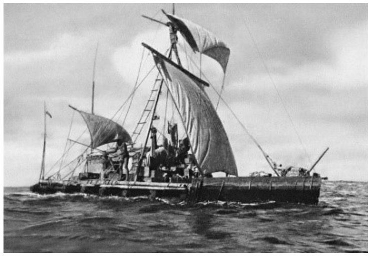
С древних времён люди видели, что одни тела плавают в воде, а другие тонут. Дерево, например, плавает, а камни тонут. Это было не простое любопытство. Для людей, живших на берегу больших рек, озёр, а тем более морей – плавание было жизненной необходимостью. Если перед Вами большое озеро, то даже хорошо плавающему человеку хотелось бы подстраховаться. А если нужно перевести груз? А если перед Вами море и нужно плыть несколько дней?

Чтобы не утонуть, переплывая большую реку или озеро, можно взять с собой какой-нибудь предмет, который не тонет в воде, например, толстую ветку или бревно. Поскольку бревно не тонет в воде, то оно может помочь удержаться на воде и Вам. Плаванье на бревне – это не фантазия. При кораблекрушениях на фрегатах моряки использовали обломки судна, например, мачту, чтобы не утонуть, а доплыть до берега. Чтобы спасительная доска «не ушла из рук» моряки иногда привязывали себя к ней.

Однако, плавая с бревном, Вы все время находитесь в воде, а вода может быть очень холодной. Поэтому хотелось бы не просто плыть, держась за бревно, а плыть на бревне, желательно, оставаясь сухим.

Но опыт показывает, что если встать на бревно (и сохранить равновесие), то бревно уйдет вместе с Вами под воду. То есть, одного бревна мало, нужно связать вместе несколько бревен. Получится плот. Теперь можно плыть, не замочив ног, используя длинный шест, чтобы отталкиваться от дна. А если озеро глубокое, то можно грести веслом.

К несомненным достоинствам плота можно отнести быстроту и простоту его изготовления. Он полезен, когда нужно переправить через реку свои вещи (спички, продукты), не намочив их. Древние индейцы в Южной Америке строили плоты из длинных стволов бальсовых деревьев, связывая их веревками. Плоты имели большие размеры, на них помещались хижины для защиты от непогоды. В 1947 году известный путешественник Тур Хейердал (1914 – 2002) с командой собрал плот без единого гвоздя по подобию плотов индейцев. Плот получил название «Кон-Тики». Экспедиция Тура Хейердала проплыла более двух тысяч километров по Тихому океану от Перу до островов Полинезии. Таким образом, было показано, что в древности южноамериканские индейцы могли добираться до далеких полинезийских островов.



Плот «Кон-Тики»

Но плоты – это не только тень далёкого прошлого. В Великую Отечественную войну плоты использовали для перевозки оружия и боеприпасов, в том числе пушек массой более четырех тонн. Сегодня плоты используют как спасательное средство при кораблекрушении.

Переправа пушек на плотах

Естественно, у древних строителей возникал вопрос: какой вес сможет выдержать плот? Скорее всего, этот вопрос решался чисто экспериментально: определялось, сколько может выдержать одно бревно, а затем этот вес умножался на число брёвен.

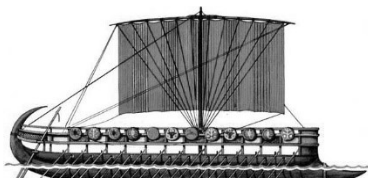
Однако, у плотов есть масса недостатков. Во-первых, у них низкая скорость. Во-вторых, плотом сложно управлять. Чем больше взять брёвен, тем тяжелее и неповоротливее будет плот. В-третьих, плот тяжело транспортировать по суше, даже небольшой плот из десятка брёвен, на берегу будет неподъёмным. Можно ли уменьшить вес плота, но сохранить его плавучесть?

Явление плаванья тел имеет занятный парадокс. Хорошо известно, что кусок железа тонет. Но если пустую консервную банку, например, из-под сгущёнки, опустить в воду отверстием вверх, то она будет плавать. Правда, плавание будет не устойчивым. Если банка наклонится и зачерпнёт воду, она утонет. Чтобы она плавала устойчиво, нужно положить в банку тяжёлый предмет – *балласт*. Получается парадокс: чтобы получить устойчивое плаванье предмет нужно не облегчить, а, наоборот, утяжелить.

Конечно, в древности не было консервных банок, но были глиняные сосуды. Глина тонет в воде, а сосуд может плавать.

Каноэ

Плавающие «сосуды» известны с глубокой древности. Индейцы выдалбливали большое дерево и делали каноэ. Можно собрать конструкцию из досок – получится лодка. Чтобы в щели не затекала вода их нужно просмолить. Заметим, что каноэ и лодка значительно легче плота, способного поднять такой же груз. Лодка хорошо подходит для небольших рек и озер, но в море волны будут переливаться через борт и быстро заполнят её водой. Можно добавить настил и крышу, так чтобы вода не могла заливаться внутрь лодки. Поставим на неё парус – получится яхта. Сегодня на яхте опытные мореплаватели совершают кругосветные путешествия. А если увеличить размер, то получится корабль, способный перевозить десятки пассажиров. В древности финикийцы, а затем и греки плавали по всему Средиземному морю.



Финикийский военный корабль

9.2. Закон Архимеда для плавающих тел

Вернёмся к вопросу, как определить вес, который способен поднять корабль. Здесь не получится просто просуммировать веса, которые способна поднять каждая доска. Ответ на этот вопрос придумал величайший механик и математик древности Архимед (287 – 212 до н.э.).

Евклид (325 – 265), Александрия

Архимед (287 – 212), Сиракузы

Архимед родился в городе Сиракузы на острове Сицилии. Он был родственником царя Сиракуз Гиерона, благодаря чему смог поехать учиться в научный и культурный центр того времени – Александрию. Вернувшись в Сиракузы, Архимед занялся наукой и обессмертил себя многими открытиями.

Архимед жил уже позже «отца геометрии» Евклида (около 325 – 265 до н.э.). Опираясь на его труды, Архимед сделал много открытий в геометрии. Он вычислил объёмы и площадь шара, параболоида, эллипсоида, рассчитал спираль Архимеда, полуправильные многоугольники (тела Архимеда), с большой точностью вычислил число π, показав, что оно заключено в пределах: между $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{10}{70}$… Но сейчас нас интересует его работа «О плавающих телах».

Архимед рассуждал примерно так. Известно, что вода в воде не тонет. Проведём мысленный эксперимент. Представим себе озеро без волн и плавающий по нему корабль (рис. 9-1, слева).

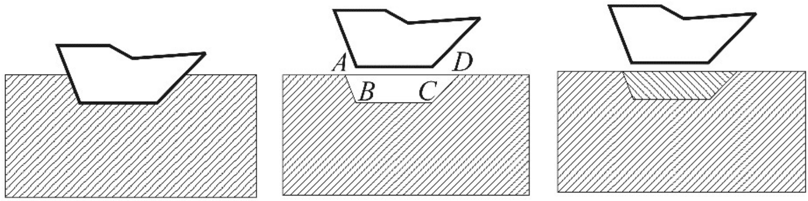


Рис. 9-1.
Обоснование закона Архимеда

Мысленно «уберём» корабль из озера (рис. 9-1, в центре). На месте корабля останется «вмятина» *ABCD*. Мысленно заполним вмятину в озере водой (рис. 9-1, справа). Почему вновь заполнившая «вмятину» вода не тонет? Очевидно, потому что озеро поддерживает её. Но ведь озеру всё равно, что мы поместим во «вмятину» – воду или корабль. Следовательно, озеро поддерживало корабль так же, как и заполнившую «вмятину» воду. Поскольку вес – это сила, с которой корабль давит на опору, то вес плавающего корабля равен весу вытесненной им воды во «вмятине». Это и есть закон Архимеда, вернее, часть этого закона. Ниже мы дополним его.

Закон Архимеда (формулировка №1). Вес плавающего тела равен весу вытесненной им воды.

Чтобы вычислить вес вытесненной воды нужно знать как соотносится масса и объём тела. Для этого в физике ввели величину *плотности* ρ:

$$\rho = \frac{m}{V},$$

где m – масса тела, а V – его объём.

Плотность воды составляет 1 г на 1 см^3 или 1 кг на 1 дм^3 или 1000 кг на 1 м^3. Очень удобно для вычислений. Это получилось случайно? Нет. Когда создавалась метрическая система мер, то сначала определили величину метра, а за единицу массы приняли массу одного литра или кубического дециметра (1 дм^3) воды.

Почему же тогда в СИ приняли в качестве эталона 1 кг, а не плотность воды? Дело в том, что плотность воды зависит от температуры, и для точных вычислений к эталону плотности пришлось бы прикладывать ещё термометр. Плотность дистиллированной воды составляет точно 1,000 кг/дм^3 при 4°С.

Рассмотрим несколько задач с использованием закона Архимеда.

Задача №1. Какую массу должен иметь плот, чтобы удержать человека массой 80 кг? Плотность дерева принять 800 кг/м^3.

Решение. По закону Архимеда, если плот вытесняет 1 м^3 воды, то он может удержать себя и груз суммарной массой 1000 кг. Плотность дерева нам дана: 800 кг/м^3. Таким образом, 1 м^3 дерева имеет массу 800 кг, и, следовательно, может удержать на поверхности воды дополнительный груз массой 200 кг. Соответственно, для удержания 80 кг понадобится деревянный плот объёмом $\frac{80\ \text{кг}}{200\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}$ = 0,4 м^3. Например, плот может иметь размеры: 2 м × 1 м × 0,2 м. При этом плот будет иметь массу 0,4 м^3 × 800 кг/м^3 = 320 кг!

Ответ: 320 кг.

Замечание. Плотность дерева различна у разных пород деревьев, но порядок величины получился правильный. Такой плот один человек не поднимет. Туристическая байдарка имеет массу в 10 – 20 раз меньше, и её вполне может перенести один турист.

Задача №2. В сосуде с водой при 0°С плавает кусок льда. Лёд тает. Как изменится уровень воды в сосуде?

Решение. Нам даже не обязательно знать плотность льда, важно, что он не тонет в воде. Пусть масса льдинки m. Мысленно вынем льдинку из воды. Останется «вмятина» объёмом V. По закону Архимеда вес льдинки равен весу вытесненной воды:

$$mg = \rho_{\text{В}} g V.$$

Отсюда найдем объём: $V = \frac{m}{\rho_В}$.

После таяния льда вода займёт объём: $\frac{m}{\rho_В}$, т.е. ровно такой же объём, какой имеет «вмятина» в воде. Зальём эту растаявшую воду в эту «вмятину» – получилась ровная поверхность. Ничего не изменилось.

Ответ: уровень не изменится.

Замечание. Варианты задачи. Как изменится уровень, если в льдинку вморожены 1) маленькая свинцовая дробинка, 2) кусочек дерева, 3) пузырёк воздуха?

Задача №3. Какая часть айсберга находится под водой?

Айсберг

Решение. Из таблиц получим, что плотность льда $\rho_Л = 0{,}9\rho_В$, где $\rho_В$ – плотность воды. Пусть масса льдины – m. Тогда её вес равен mg. Объём вытесненной воды равен объёму подводной части айсберга. По закону Архимеда вес льдины равен весу вытесненной ею воды:

$$mg = \rho_В g V_X,$$

где V_X – подводная часть айсберга. Отсюда находим подводную часть айсберга:

$$V_X = \frac{m}{\rho_В}.$$

Общий объём айсберга мы вычислим из определения плотности:

$$V = \frac{m}{\rho_Л}.$$

Из полученной системы уравнений находим искомое отношение:

$$\frac{V_X}{V} = \frac{\rho_Л}{\rho_В} = 0{,}9.$$

Ответ: под водой находится 0,9 (90%) общего объёма айсберга.

Замечание. Плотность льда меньше плотности воды. Это уникальное свойство воды. Другие твердые тела имеют большую плотность, чем их расплавы. Это свойство воды очень важно для обитателей водоёмов. Если бы лёд имел плотность больше, чем вода, то он опускался бы на дно, вскоре весь водоём стал бы ледяным, и вся рыба вымерзла бы. Но поскольку плотность льда меньше, чем плотность воды, то он плавает и покрывает только верхнюю часть водоема, препятствуя проникновению холода. Реки и озера зимой не промерзают до дна, а значит, рыбы могут плавать под ним.

То, что вода при замерзании увеличивается в объёме, нужно помнить, помещая напитки в морозильник. При расширении лёд может разрушить бутылки или банки, в которые была налита вода, соки и др. напитки.

9.3. Как Архимед разоблачил обман

Почему Архимед так заинтересовался точным вычислением грузоподъёмности корабля? Ведь опыт строительства больших кораблей к тому времени насчитывал не один век. Жизнь Архимеда овеяна легендами. Вот одна из них.

Гиерон II

Сиракузский царь Гиерон II (правил 478 – 467 до н.э.) поручил одному мастеру изготовить корону и выдал ему необходимое количество золота. Когда корона была готова, её вес был равен весу выданного золота. Позже Гиерон заподозрил, что мастер часть золота заменил более дешёвым серебром. Гиерон приказал Архимеду проверить честность мастера. Архимед сразу понял, как проверить, сделана корона из чистого золота или нет. Известно, что плотность серебра меньше

Архимед – Эврика

плотности золота. Нужно взять слиток золота, равный по весу короне, и измерить их объёмы. Если объём короны будет больше, то туда добавлено серебро.

Но как найти объём короны? Её форма очень сложна. Архимед был сильно озадачен приказом царя. Как-то он пришел в баню и заметил, что, когда он погружался в ванну, из неё стала выливаться вода. Разумеется, Архимед был не первым, кто это увидел, но он понял, что он нашел решение задачи. Архимед выскочил голым из ванны, и побежал по улицам города, крича: «Эврика!» (по-гречески – «Нашел!»).

Архимед сделал слиток из золота и слиток из серебра, каждый такого же веса, что и корона. Затем он наполнил водой сосуд до самых краев и опустил в него серебряный слиток. Слиток вытеснил немного воды. Архимед вынул слиток и долил сосуд до верха, тщательно определяя объём доливаемой воды. Так Архимед нашел объём серебра. Затем Архимед также опустил золотой слиток и определил объём чистого золота. Оказалось, что при погружении слитка из золота из сосуда вытекает меньше воды, чем в случае с серебром. После чего Архимед погрузил в сосуд корону. Она вытеснила воды больше, чем золотой слиток. Таким образом, кража была доказана.

Так гласит легенда. Заметим, что в ней не идёт речь об открытии закона Архимеда. Речь идёт о сравнении плотности тел. Архимед придумал как измерить объём тела сложной формы, т.е. как измерить объём короны.

Попробуем проанализировать легенду на предмет её правдоподобности. Оценим возможную массу короны. Вряд ли правитель захотел мучить себя сверхтяжёлой короной. Например, масса знаменитой шапки Мономаха 994 грамма. Примем для ровного счёта массу короны 1 кг. Плотность серебра 10,5 г/см^3, золота – 19,3 г/см^3. Тогда брусок из серебра такой же массы должен иметь объём 95 см^3, а из золота – 52 см^3. Разность составляет 43 см^3 – примерно пятую часть стакана с водой, т.е. вполне заметную величину. Однако, если бы мастер заменил не всё золото на серебро, а к примеру, пятую часть (200 грамм), то плотность короны в этом случае составила бы $0{,}2 \times 10{,}5 + 0{,}8 \times 19{,}3 = 17{,}5$ г/см^3, а объём короны – 57 см^3, т.е. всего на 5 см^3 больше объёма золотого бруска. Это объём чайной ложки. Измерить объём 50 см^3 с точностью 5 см^3 без стеклянной мерной мензурки Архимед вряд ли смог. Взвешивать он мог намного точнее. Учитывая, что часть воды всегда остаётся на стенках сосуда, вряд ли такая малая разница достаточна для обвинения в краже. Можно ли определить состав короны без измерения объёма? Да, возможно. Другая версия легенды говорит, что Архимед открыл метод *гидростатического взвешивания*.

9.4. Гидростатическое взвешивание

Ранее мы обсудили, что будет с телом, которое плавает в воде. Но что можно сказать о теле, которое тонет в воде? По одной из версии легенды, Архимед, погружаясь в ванну, почувствовал, что его тело становится легче, и, проведя описанный выше мысленный эксперимент с кораблём, сообразил, что на тело со стороны воды действует сила, равная весу вытесненной им воды. Дополним закон Архимеда с учётом тел, тонущих в воде.

Закон Архимеда (формулировка №2). На тело, погружённое в воду, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной им воды.

Метод гидростатического взвешивания заключается в том, что нужно тело привязать нитью к весам и взвесить сначала в воздухе, а затем тело погрузить в воду, как показано на рис. 9-2. Главное достоинство метода – он не требует определять объём тела.

При опускании короны из чистого золота в воду, сила, с которой корона будет действовать на весы, уменьшится на $\frac{\rho_{вода}}{\rho_{золото}} = \frac{1}{19{,}3}$, т.е. примерно на одну девятнадцатую часть, а из серебра – на одну десятую. То есть один килограмм золота в воде будет уравновешиваться гирьками общей массой:

$1 - \frac{1}{19{,}3} = 0{,}948$ кг, а килограмм серебра: $1 - \frac{1}{10{,}5} = 0{,}905$ кг.

Разница между результатами взвешивания золотой и серебряной короны составит 0,043 кг или 43 грамм – разница вполне заметная.

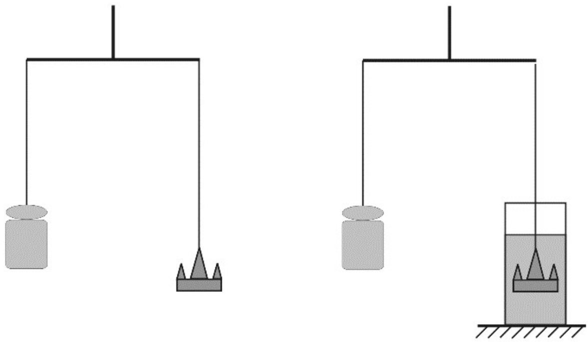


Рис. 9-2.
Гидростатическое взвешивание

Что будет, если мастер заменил только пятую часть золота (200 г) на серебро? Как мы рассчитали выше, плотность короны в этом случае составит 17,5 г/см^3, и для её уравновешивания понадобятся гирьки массой: $1 - \frac{1}{17{,}5} = 0{,}943$ кг. Разница в массе гирек, требующихся для уравновешивания короны из чистого золота и фальшивой короны, составит 0,948 – 0,943 = 0,005 кг или 5 грамм, а взвешивать на весах Архимеда можно с точностью до сотых долей грамма. Точности взвешивания более чем достаточно для выявления обмана. Таким образом, возможно, что толчком к открытию закона Архимеда послужило задание царя по определению состава короны.

Замечание. У мастера в запасе была одна уловка. Метод гидростатического взвешивания сложно применить к телам, у которых внутри пустоты. Мастер мог бы сказать, что внутри короны есть пустоты общим объёмом 5 см^3. Тогда обман так просто обнаружить не удалось бы. Правда, если корона ажурная, то там просто негде расположить пустоты.

Как меняется вес тела, погруженного в воду? Рассмотрим следующую задачу.

Задача. К коромыслу весов привязан груз и стакан с водой, как показано на рис. 9-3. Весы уравновешены. Как изменится равновесие, если груз полностью или частично опустить в воду?

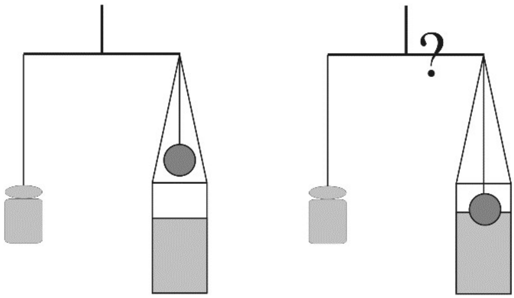


Рис. 9-3.
Как изменится равновесие?

Решение. Равновесие не изменится. С какой силой вода выталкивает груз (F_A), с такой же силой груз давит на воду (F_B), давление через воду передаётся на дно сосуда и, в конечном счёте, на чашу весов (рис. 9-4.). Более подробно мы разберём этот вопрос при изучении III закона Ньютона.

Ответ: не изменится.

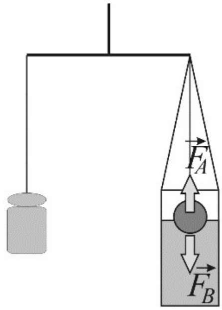


Рис. 9-4.
Сила Архимеда и вес шарика

Замечание. Иногда можно прочитать, что вес тела, погруженного в жидкость или газ, уменьшается. Кажется, что сила натяжения нити (подвеса), уменьшается, следовательно, уменьшается и вес тела. Но надо вспомнить, что вес – это сила, с которой тело действует на опору или подвес. У погруженного тела натяжение нити уменьшается, но на такую же величину увеличивается сила, давящая на опору, т.е. на воду. Поэтому уменьшается лишь сила, действующая на подвес, но полный вес тела не меняется.

9.5. Аэростатика

Всё ли мы теперь знаем о законе Архимеда? Нет, нужно сделать два важных дополнения.

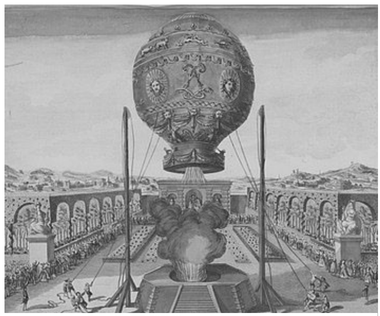
Во-первых, выталкивающая сила существует не только в воде, но в любой жидкости.

Во-вторых, выталкивающая сила существует также в воздухе, да и любом газе.

Дополним формулировку закона Архимеда.

Закон Архимеда (формулировка №3). На тело, погружённое в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной им жидкости или газа.

Про выталкивающую силу воздуха Архимед не знал, поскольку в то время считалось, что воздух вообще ничего весит! Действительно, плотность воздуха при комнатной температуре (20ºС) составляет примерно 1,2 кг/м^3 – в 800 раз меньше плотности воды! Но, главное, как измерить силу Архимеда воздуха? Ведь воздух вокруг нас, и он действует на все предметы! Чтобы ощутить силу Архимеда воздуха нужно уметь или откачивать воздух, что научились только в XVII веке, или иметь газ, более лёгкий, чем воздух. Но водород откроют в XVIII веке, а гелий ещё позже.



Шар братьев Монгольфье

Нагретый воздух имеет меньшую плотность, чем холодный, и сегодня горячий воздух, получаемый газовыми горелками, используют для полёта на воздушных шарах. Первый воздушный шар с тёплым воздухом запустили братья Монгольфье в 1783 году. Конечно, древние люди видели, как дым от костра поднимается вверх, но, согласно Аристотелю, это происходило благодаря «естественному движению» лёгких тел вверх. Причём «легкость» Аристотель относил к дыму, а не к нагретому воздуху.

Сегодня мы можем наблюдать силу Архимеда воздуха с помощью детских воздушных шаров, наполненных гелием. Правда, подъёмная сила у них небольшая – они способны поднять груз массой в несколько грамм. Сделав большие шары – аэростаты, можно поднимать в воздух людей, а если приделать воздушный винт, то получится дирижабль. В прошлом такие дирижабли, наполненные лёгкими газами: водородом или гелием, широко

Дирижабль, 1933

использовались для доставки людей и грузов. К сожалению, они были очень медленны и не выдержали конкуренции с самолётами. Сильная сторона дирижаблей – их экономичность по сравнению с самолётами и вертолётами – им ведь не нужно тратить энергию на поддержание высоты полёта. Сегодня они используются, например, для регулировки уличного движения.

Если задуматься, то получается, что все предыдущие рассуждения о взвешивании были неверны, поскольку не учитывали силу Архимеда воздуха. Впрочем, сила Архимеда воздуха не будет влиять на результаты взвешивания, если взвешиваемый груз и гирьки имеют примерно одинаковую плотность. Если требуются очень точные измерения, силу Архимеда воздуха нужно учитывать. Но в большинстве случаях она даёт лишь незначительный вклад, поэтому по умолчанию ею пренебрегают.

Для примера решим 2 задачи.

Задача №1. Алюминиевый груз уравновесили медными гирьками общей массой $m_0 = 1$ кг. Найдите истинную массу груза. Считать, что гирьки были изготовлены с большой точностью с учётом силы Архимеда воздуха. Плотность воздуха $\rho_B = 1{,}2$ кг/м^3, алюминия $\rho_A = 2700$ кг/м^3, меди $\rho_M = 9000$ кг/м^3.

Решение. Обозначим истинную массу груза m_X.

Тогда по определению плотности объём груза равен $V_1 = \frac{m_X}{\rho_A}$, а гирек – $V_0 = \frac{m_0}{\rho_M}$.

По закону Архимеда на груз действует выталкивающая сила: $V_1 \rho_B g$.

Тогда груз давит на чашу весов с силой:

$$P_1 = m_X g - V_1 \rho_B g = g\left(m_X - \frac{m_X}{\rho_A}\rho_B\right) = g m_X\left(1 - \frac{\rho_B}{\rho_A}\right),$$

а гирьки давят на чашу весов с силой:

$$P_0 = m_0 g - V_0 \rho_B g = g\left(m_0 - \frac{m_0}{\rho_M}\rho_B\right) = g m_0\left(1 - \frac{\rho_B}{\rho_M}\right).$$

По условию, весы уравновешены, следовательно, $P_1 = P_0$:

$$m_X\left(1 - \frac{\rho_B}{\rho_A}\right) = m_0\left(1 - \frac{\rho_B}{\rho_M}\right).$$

Отсюда:

$$m_X = m_0 \frac{1 - \frac{\rho_B}{\rho_M}}{1 - \frac{\rho_B}{\rho_A}} = m_0 \frac{1 - \frac{1{,}2}{9000}}{1 - \frac{1{,}2}{2700}} = 1{,}0003 \cdot m_0 = 1{,}0003 \text{ кг.}$$

Ответ: истинная масса груза 1,0003 кг.

Видно, что поправка незначительна (0,3 г) и ею в большинстве случаев можно пренебречь.

Учтём вклад силы Архимеда воздуха в задаче с тающей льдинкой.

Задача №2. В сосуде с водой при 0ºС плавает кусок льда массы m = 100 г. Лёд тает. Как изменится уровень воды в сосуде с учётом силы Архимеда воздуха? Сечение сосуда представляет квадрат 20 см × 20 см.

Решение. По определению плотности объём V льдинки составит:

$$V = \frac{m}{\rho_{Л}}.$$

Часть льдинки будет под водой V_1. На неё будет действовать сила Архимеда воды: $\rho_{В} V_1 g$. Над водой будет $(V - V_1)$, на неё будет действовать сила Архимеда воздуха: $\rho_{ВОЗД}(V - V_1)g$. Сила Архимеда должна компенсировать вес льдинки:

$$mg = \rho_{\text{в}} g V_1 + \rho_{\text{возд}}(V - V_1)g.$$

Отсюда:

$$V_1 = \frac{m - \rho_{\text{возд}} V}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{возд}}}.$$

Мысленно вынем льдинку из воды. В воде останется выемка объёмом V_1. После таяния льда образуется объём воды $V_2 = \frac{m}{\rho_B}$. В результате объём воды в сосуде увеличится на:

$$V_2 - V_1 = \frac{m}{\rho_B} - \frac{m - \rho_{\text{возд}} V}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{возд}}} = \frac{m}{\rho_B} - \frac{m - \rho_{\text{возд}} \frac{m}{\rho_{\text{л}}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{возд}}}.$$

Численно:

$$V_2 - V_1 = \frac{0{,}1}{1000} - \frac{0{,}1 - 1{,}2 \times \frac{0{,}1}{900}}{1000 - 1{,}2} = 1{,}335 \times 10^{-8}\ \text{м}^3 = \\ = 0{,}01335\ \text{см}^3.$$

Таким образом, объём воды после таяния льда немного, но увеличится. Чтобы вычислить изменение высоты уровня воды осталось разделить изменение объёма на площадь сосуда 400 см^2. Получается 3×10^{-5} см или 3×10^{-4} мм. Заметить такое повышение уровня нереально. Тем не менее, качественный ответ в задаче другой: уровень повысится.

Ответ: уровень повысится на 3×10^{-4} мм.

* * *

Нужно подчеркнуть замечательное свойство закона Архимеда. Он применим и к маленькой льдинке, и к аэростату, и к громадному океанскому лайнеру, способному взять на борт тысячи тонн груза!

9.6. Эффект прилипания

К закону Архимеда нужно сделать очень важное замечание. Чтобы жидкость выталкивала предмет, она должна находиться под ним. Для плавающих тел это требование выполняется автоматически, но если предмет утонул, то он может «прилипнуть» ко дну.

Сделай сам

Можно провести простой эксперимент. Потребуется сосуд с плоским дном и небольшая парафиновая (стеариновая) свечка. Плотность парафина меньше плотности воды, поэтому свечка не тонет. Отшлифуйте нижнюю часть свечки и сильно прижмите её ко дну так, чтобы под свечкой не осталось воды. Свечка не всплывет. Это, так называемый, *эффект прилипания*. Пошевелите свечку, чтобы под неё подтекла вода. Она тут же начнёт всплывать.

Почему так происходит? Когда мы мысленно вынимали предмет из воды, мы считали, что под образовавшейся «выемкой» остаётся вода. Если же под «выемкой» воды нет, то что будет «поддерживать» налитую в «выемку» воду? Предыдущие рассуждения перестают работать.

Если тело прижато ко дну, то остаётся только сила, с которой вода давит на предмет сверху, а силы Архимеда нет. В этом легко убедиться в ванной. Пока в ванне нет воды, то пробка легко затыкает сливное отверстие и легко открывается. Если же наполнить ванну водой, то вынуть пробку намного сложнее.

Эффект прилипания очень опасен для подводных лодок. Если подводная лодка ляжет на мягкий грунт, то она может «прилипнуть» ко дну и самостоятельно всплыть уже не сможет.

Сделай сам

9.7. Картезианский водолаз

Французский физик и философ Рене Декарт (по латыни: Ренатус Картезиус) придумал занятную игрушку, называемую «картезианским водолазом». Сделать такую игрушку можно самому. Нужна пластиковая бутылка с широким горлом и маленькая фарфоровая статуэтка (рис. 9-5, слева). Такие статуэтки продаются в магазине сувениров, их делают пустотелыми, а внизу статуэтки есть отверстие. Если нет статуэтки, то можно обойтись простой пробиркой или старым пузырьком из-под лекарств. Пробирку надо засунуть отверстием вниз, чтобы в ней остался небольшой пузырек воздуха, и она чуть выступала бы из воды. Осталось завинтить бутылку крышкой и водолаз готов. Сдавливая бутылку руками, можно заставить водолаза опустится на дно.

Если Вы ещё не догадались как может работать такой игрушечный водолаз, посмотрите на рис. 9-5, справа. Внутри игрушки находится пузырёк воздуха *ABCD*. Без пузырька игрушка бы утонула, но пузырёк вытесняет достаточный объём воды, чтобы игрушка в соответствии с законом Архимеда всплыла. При сдавливании бутылки давление в ней увеличивается, размер пузырька *ABCD* уменьшается, и, соответственно, уменьшается объём вытесненной воды. Игрушка начинает тонуть. Если бутылку перестать сжимать, давление в ней восстанавливается, пузырёк расширяется до прежнего размера, и игрушка всплывает.

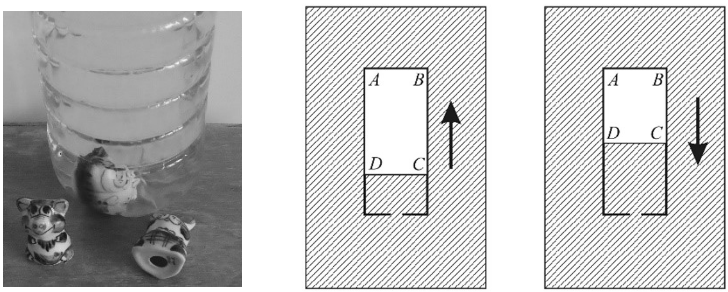


Рис. 9-5.
Устройство картезианского водолаза

Это интересно

9.8. Почему тонут деревянные корабли?

Айвазовский «Девятый вал»

Если дерево плавает в воде, то почему при кораблекрушении тонут деревянные корабли? Казалось бы, если даже будет пробоина, то вода заполнит некоторую часть корабля, но он не утонет, ведь не тонет же каждое отдельно взятое бревно. Ведь многие матросы спасались, отламывая часть корабля: кусок мачты, деревянный штурвал и пр., как показано на картине И.К. Айвазовского «Девятый вал».

Дело в том, что при постройке корабля применяют гвозди, скобы и другой крепеж, который утяжеляет корабль. Кроме того, корабль обычно везёт груз, который не так легко с него быстро сбросить.

Тема плавучести деревянного корабля использована в известной повести А. Некрасова «Приключения капитана Врунгеля». Там есть эпизод, когда в одном порту его яхту «Беду» приговорили к затоплению. Капитан Врунгель проявил находчивость и договорился, что яхту засыпят не обычным песком, а сахарным песком, которого в той местности был переизбыток. Через некоторое время сахарный песок растаял, и «Беда» всплыла. Реальна ли эта история? Возможно, она более реалистична, чем остальные приключения капитана Врунгеля. Наверное, команде пришлось долго вычерпывать сладкую воду, прежде чем яхта смогла поплыть дальше.

Это интересно

9.9. Парадокс обучения плаванью

Из закона Архимеда следует, что, если плотность тела меньше плотности воды – оно плавает (например, дерево), а если больше – тонет (например, топор). А плотность человека больше плотности воды или меньше? Если меньше, то он должен плавать как бревно, а если больше, то он утонет как топор. Тогда в чем же смысл обучения плаванью? Не в смысле спортивного стиля, а просто держаться на воде? Ведь если плотность человека больше плотности воды, то обучение бесполезно – он всё равно пойдет ко дну. Если же его плотность меньше плотности воды, тогда вовсе не нужно учить плавать, он и так должен прекрасно держаться на воде. Получается парадокс: учиться держаться на воде бессмысленно.

Решение парадокса в том, что плотность человека не постоянна. При вдохе лёгкие заполняются воздухом, объём увеличивается, плотность становится меньше плотности воды, а при выдохе – больше. Значит, обучение плаванию – это, прежде всего, обучение правильному дыханию.

Спасательные жилеты

Кроме того, нужно правильно держаться на воде. Ошибкой новичков является то, что они стремятся, как можно больше высунуть голову из воды. Хотя, чтобы не утонуть, в соответствии с законом Архимеда, нужно, наоборот, вытеснить как можно больше воды, для этого надо погрузить голову в воду, чтобы на поверхности остался один нос.

Если человек не уверен в своём умении плавать или попал в кораблекрушение, то ему на помощь может прийти спасательный жилет. Ранее мы рассчитывали массу для плота, масса спасательного жилета намного меньше, почему он не даёт утонуть?

Потому что человек на плоту находится над водой, а в жилете – в воде. Задача спасательного жилета помочь удержать над водой голову. Жилет набивают лёгкими водонепроницаемыми материалами, например пробкой (из пробкового дуба) или пенопластом. Заметим, что пользоваться надувными спасательными средствами небезопасно, поскольку они могут продырявиться и сдуться. Поэтому плавать с надувными матрасами, кругами и пр. детям можно только под контролем взрослых.

А что делать, если ваша лодка перевернулась, и Вы оказались в воде?

Прежде всего, нужно не терять самообладание, помните, что если вы сделаете всё правильно, то сможете продержаться на воде достаточно долго, чтобы к вам смогли прийти на помощь.

По закону Архимеда для увеличения плавучести нужно увеличить объём. Значит, первое, что должен сделать тонущий – набрать побольше воздуха в лёгкие. Если он оказался в воде одетым, необходимо сбросить с себя тяжёлую одежду и особенно обувь. Поэтому, плавая на байдарках, которые весьма неустойчивы и могут перевернуться, нельзя надевать сапоги, ведь их сложно снять в воде.

Далее нужно постараться принять горизонтальное положение, погрузив голову в воду, оставляя на поверхности воды только нос. Помните, что резкие беспорядочные движения ногами и руками только ухудшат положение тонущего. Можете убедиться в этом сами на мелководье. Делая судорожные движения, Вы будете проваливаться под воду, дыхание участится, уже будет сложно задержать его на некоторое время.

К сожалению, многие тонущие именно так и поступают: начинают беспорядочно барахтаться в воде, выпуская воздух из лёгких, пытаются вдохнуть и захлебываются, теряя последние остатки плавучести.

Многие животные прекрасно плавают, хотя их никто этому не учил. Полезно, например, понаблюдать, за тем, как плавает собака. Она инстинктивно оставляет над водой только носик. Как ни удивительно, слоны тоже являются отличными пловцами. Обладатели длинного хобота оставляют лишь его маленький кончик над поверхностью воды.

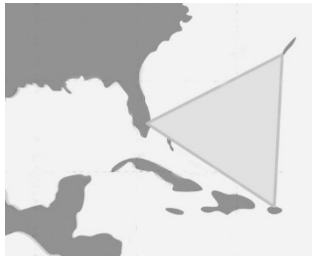
Слоны умеют плавать

Получается человек хуже животного? У него нет врождённого умения плавать? Оказывается это не так: врождённое умение есть, но его нужно развивать. Научные исследования показывают, что новорождённый ребёнок имеет плавательный рефлекс в течение первых недель жизни. Однако если его не развивать, то ребёнок быстро забывает, как нужно плавать. И ему позже приходиться учиться плавать заново.

Очень надеемся, что следующая информация Вам не понадобится. Если Вы попадаете в кораблекрушение, то нужно отплыть от тонущего корабля на 50-100 метров, чтобы Вас не затянуло круговоротом воды (воронкой). Даже если корабль тонет медленно, то из его помещений может начать интенсивно выходить воздух. Пузыри не вынесут Вас на поверхность, напротив, сила Архимеда воды на Вас перестанет действовать, и Вы провалитесь вниз, даже если хорошо умеете плавать.

Одна из гипотез, объясняющая исчезновение судов в Бермудском треугольнике, связана с выходом большого количества метана. На дне болот и заросших водорослями озёр можно наблюдать выход пузырьков газа – это метан, образующийся при гниении растений.

На дне Бермудского треугольника много растений. Хотя научно это не доказано, но нет ничего невероятного в том, что на дне образуется много метана, который может выйти наружу в виде пузырей размером в корабль и больше. Попав в такой пузырь, корабль может в него провалиться и за считанные минуты затонуть. Более того, плотность метана меньше воздуха, метан может устремиться вверх, образовать воронку и опрокинуть летящий самолёт. Впрочем, никаких научных доказательств накопления метана на дне Бермудского треугольника получено не было.



Бермудский треугольник

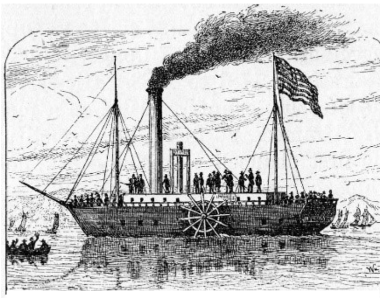
Это интересно

9.10. Корабли из стали

Важнейшим качеством корабля является его прочность. Корабль всегда может попасть в шторм. Кроме того, корабли участвуют в сражениях, отбиваются от нападения пиратов. С древнейших времён корабли подвергали бомбардировкой камнями из катапульт, забрасывали горящей смолой, а в Средние века стреляли ядрами из пушек. Дерево – не очень прочный материал, к тому же горючий. Почему в древности корабли не делали из стали?

Во-первых, в древности железо производили мало, и его хватало только на мечи и др. оружие. Сталь начали выплавлять в большом количестве только в Новое время.

Во-вторых, стальной корабль намного тяжелее деревянного (такого же размера), следовательно, нужно больше усилий, чтобы придать ему движение. Силы ветра для стального корабля недостаточно. Поэтому стальные корабли стали делать только после того, как в конце XVIII века была изобретена паровая машина. Первый корабль с паровым двигателем создал американский инженер Роберт Фултон (1765-1815). Свое изобретение он назвал «*пароход*» и запатентовал в 1809 году. Пароход Фултона был деревянным и имел парус на случай поломки паровой машины. Но к концу XIX века практически весь военный флот стал стальным.



Пароход Фултона

Интересно заметить, что ранее, в 1803 году Фултон предложил проект парохода Наполеону. Наличие флота из пароходов помогло бы Наполеону завоевать Англию. Но тот, отказался, посчитав, что корабль без парусов – это фантастика. Существует легенда, что лишённый власти Наполеон, следуя к месту своего заточения – к острову Святой Елены, встретил пароход Фултона и с горечью произнес, что, отказавшись от пароходов, он совершил роковую ошибку.

И всё же плаванье на стальных кораблях связано с определенным риском – если образуется пробоина, которую нельзя заделать, то корабль может затонуть. Как можно обезопасить плавание? Можно разделить корабль на водонепроницаемые отсеки. В случае пробоины будет затоплен только один отсек, и корабль сможет продолжить плавание. Часто для большей безопасности на стальных кораблях делают двойные борта и двойное дно, что также позволяет повысить его прочность.

Двойное дно также используют на современных танкерах, но уже для другой цели: предохранение от утечки нефти в случае аварии. Ведь при попадании нефти в воду, образуется масленое пятно, порой в несколько километров, которое губит рыб и птиц.

И всё же катастрофы в океанах бывают. Одна из самых известных – это гибель крупнейшего океанского лайнера «Титаник» в 1912 году. По иронии судьбы этот гигантский корабль высотой с 11-этажный дом был объявлен совершенно безопасным. У него был прочный корпус, двойное дно, пятнадцать водонепроницаемых отсеков… Но в первом же плаванье он столкнулся с айсбергом и затонул. К сожалению, погибло более 1000 человек, поскольку считалось, что корабль не может затонуть и он не был обеспечен достаточным количеством спасательных средств. Поэтому на кораблях обязательно должны быть средства спасения: шлюпки, плоты, спасательные жилеты и др.

Титаник

Из стали делают не только корабли, но и средства для переправы – понтоны (от лат. *ponto* – плоскодонное судно). Они представляют собой герметичные стальные баржи и способны выдерживать значительный вес. Понтоны перевозятся в разобранном виде, а на реке из них быстро собирают мосты. Понтонные переправы незаменимы, когда необходимо перебросить через реку тяжёлые пушки или танки.

Понтонная переправа

Это интересно

9.11. Где легче плавать в море или речке?

Те, кто хоть раз плавал в море, знают, что в море держаться на воде легче, чем в реке. Почему же так происходит? Плотность солёной воды в море или океане больше плотности пресной воды. Растворенные в воде соли повышают её плотность, поэтому вытесненный объём солёной воды будет иметь больший вес, чем пресной, и, следовательно, по закону Архимеда выталкивающая сила со стороны солёной воды будет больше, чем пресной.

Какое количество соли содержится в море? В разных морях и океанах плотность воды несколько отличается. Это определяется тем, какое количество рек впадает в море, насколько интенсивно происходит испарение воды. Чем больше впадающих рек, тем меньше плотность морской воды. Для Балтийского моря разница в плотности морской и пресной воды составляет всего один процент (1%). Казалось бы, 1% – это так мало. Но и этого оказывается достаточно. Ведь плотность человеческого тела лишь немного больше плотности солёной воды. И поэтому, плавая в море, уже можно делать не такие глубокие вдохи, как в пресной воде.

В Черном море плотность воды на 2% больше плотности пресной воды, в Атлантическом океане – на 3%, а в Красном море даже на 4%. Значит, плавать в них ещё легче, чем в Балтийском море. В Палестине с древнейших времен существует удивительное море, называемое Мёртвым. Его воды настолько солёны, так что в них не может жить ни одно живое существо. В Мёртвом море за счёт большого количества растворенных солей плотность воды на 30% больше плотности пресной воды, и человек, плавая здесь, едва погружается в воду. Поэтому в такой солёной воде человеку невозможно пойти ко дну.


Плавание в Мёртвом море

А большим кораблям тоже легче плавать в солёной воде?

Корабли нельзя загружать по самые борта. Всегда нужно иметь запас плавучести на случай шторма. Поэтому на кораблях вдоль борта наносят специальный знак – «грузовую марку», называемую также грузовой ватерлинией (от голландского слова «ватер» – вода). Эта линия показывает допустимую глубину погружения судна, то есть, насколько его можно загрузить для безопасного плаванья. Если полоска над водой – значит, всё в порядке. «Грузовая марка» – это даже не одна, а несколько полосок: для пресной и солёной воды, а также для плавания в тропиках и в умеренных широтах, поскольку плотность воды зависит также от температуры.

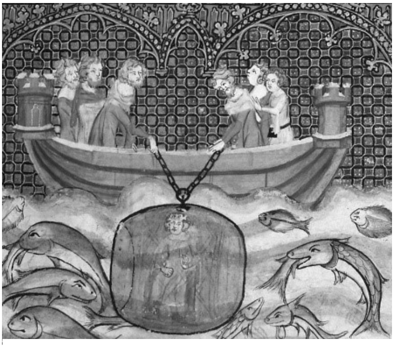
Это интересно

9.12. Ныряльщики и кессонная болезнь

Научиться плавать сложно, но научиться нырять ещё сложнее. Как глубоко может нырнуть человек? Сила Архимеда не даёт нам утонуть, но она же не даёт нам глубоко нырнуть. Впрочем, есть очевидный способ борьбы с силой Архимеда – нужно увеличить свой вес. Например, взять с собой тяжёлый камень. Именно этот способ с незапамятных времён применяют ловцы губок, кораллов, жемчуга и др. на Цейлоне, в Японском и Красном морях. Без специального снаряжения, но, обладая навыками подводного погружения, они прыгают за борт с тяжёлым камнем в руках, погружаются благодаря его весу и остаются под водой в течение нескольких минут. Отпуская камень, они поднимаются на поверхность.

Сколько же нужно взять камней в лодку, чтобы добыть хороший улов? Если подумать, то хватит одного камня. Нужно только привязать камень длинной веревкой, и, вернувшись в лодку, вытащить его.

Ныряние на большие глубины – это не пустая забава, а трудная работа для профессионалов, добывающих губки, кораллы, жемчуг



Александр Македонский под водой, средневековая гравюра

и др. В античности была даже профессия – доставать ценности с затонувших кораблей. Что делать, если работа под водой требует большего времени, чем несколько минут? Можно, например, взять с собой запас воздуха. Так поступали в древней Греции – ныряльщики брали с собой козьи меха, заполненные воздухом. Есть легенда, что Александр Македонский (356 – 323 до н.э.) во время осады финикийского города Тира спускался под воду в стеклянном ящике, чтобы лично осмотреть путь для прохода судов. Точные данные не сохранились, но, скорее всего, этот ящик напоминал современный аквариум, надетый на голову человека. При погружении такого аквариума вверх дном там остается воздух, которым мог дышать водолаз.

Подобные перевёрнутые бочки и др. сосуды использовались в Средние века и в Новое время, в частности, для поиска сокровищ на затонувших судах. Как это работает легко увидеть самим. Нужно взять обычный стакан, перевернуть его вверх дном и погрузить в сосуд с водой. В стакане останется запас воздуха.

Сюжет с дыханием под водой использовался в сериале «Джек воробей». Там капитан Джек с помощником перевернули лодку вверх дном и шли по дну, дыша воздухом, который сохранился в лодке.

Однако в ящике-аквариуме запас воздуха ограничен и в нём нельзя долго находиться. Можно ли находясь под водой пополнять запас воздуха? Это можно сделать, например, с помощью трубки из стеблей тростника. Один конец трубки нужно засунуть в рот, а другой оставить над водой. Так поступали индейцы, когда прятались в засаде в зарослях тростника.

Скафандр
Леонардо да Винчи

Но дышать через трубку сложно и даже опасно – с ней легко захлебнуться. Хорошо бы соединить трубку с описанным выше перевернутым «аквариумом». Идея такого устройства возникла давно. В трудах великого итальянского изобретателя Леонардо да Винчи (1452 – 1519) сохранился рисунок человека в костюме, напоминавший современный водолазный скафандр. Костюм был кожаный и имел стеклянные линзы для глаз. Такой костюм был изготовлен по рисункам Леонардо в середине XX века и хранится в музее в Милане. К сожалению, неизвестно, был ли такой костюм сделан во времена Леонардо.

Английский изобретатель и астрономом Эдмунд Галлей (1656 – 1742) предложил пополнять запасы воздуха в воздушном колоколе с помощью перевёрнутых бочек (рис. 9-6). Из такого колокола помощник мог выйти, надев на голову шлем со шлангом, конец которого находился внутри колокола. Сверху опускали утяжелённые бочки с воздухом. Помощник пододвигал бочки под колокол и пополнял запасы воздуха.

К сожалению, с таким колоколом невозможно опуститься глубже 20 метров. Ведь чем глубже Вы опуститесь под воду, тем сильнее вода будет сдавливать воздух внутри колокола, и тем меньше будет объём воздуха внутри колокола. Следующая идея состояла в том, чтобы подавать в водолазный костюм воздух под давлением, чтобы давление воздуха в водолазном костюме компенсировало давление воды даже на большой глубине. В 1689 г. французский физик Дени Папен (1647 – 1712) предложил нагнетать воздух в колокол мощным насосом.

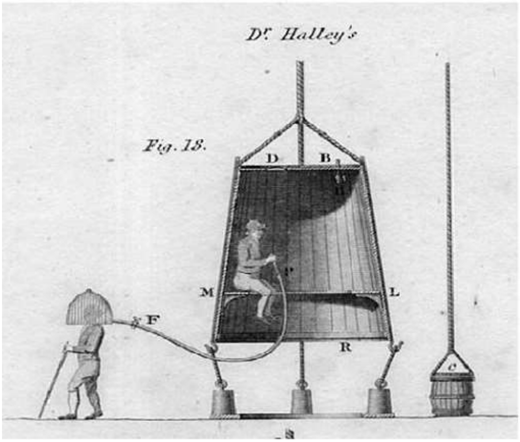
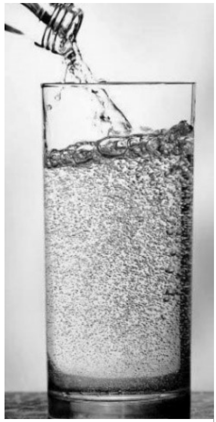


Рис. 9-6.
Колокол Галлея

В 1837 году немецкий изобретатель Огюст Зибе сконструировал мягкий скафандр (греч. – «человек-лодка»). Скафандр состоял из резиновой рубашки и медного шлема со стеклянным иллюминатором. Воздух для дыхания водолаза подавался насосом по резиновому шлангу. Для удобства погружения использовались тяжёлые стальные «галоши» и дополнительные грузы на поясе.

Казалось бы, все проблемы решены. Однако, оказалось, что на глубине водолазов подстерегает новая опасность, о которой раньше и не подозревали. В мягком скафандре можно погружаться в воду на глубину до 100 м. Однако подъём должен производится медленно. При быстром подъёме у водолазов начинается тошнота, головокружение и даже может наступить смерть. Это называют *кессонной болезнью* (от франц. «кессон» – «ящик»).

Чем вызвана кессонная болезнь? Оказывается, дело в растворённом в крови газе – азоте. Чем выше внешнее давление, тем больше растворяется газа в воде. В этом можно убедиться, открывая бутылку с газированной водой. Чтобы придать газированность напитку в нём растворяют углекислый газ под высоким давлением. При открытии такой бутылки, пузырьки выделяются и содержимое поднимается вверх, стремясь выплеснуться наружу. Причём, чем больше было давление при изготовлении напитка, тем сильнее он газирован.

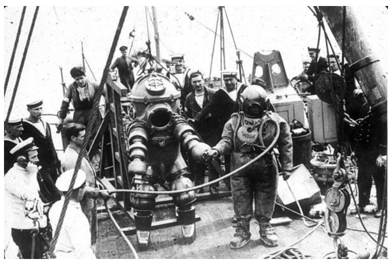


Газировка

Эксперименты на животных показали, что при вдыхании воздуха под высоким давлением происходит растворение азота в крови. Так, при нормальном атмосферном давлении (1 атм.) в 100 мл крови содержится 1 мл азота, а при давлении 3 атм. – в три раза больше. При быстром подъёме водолаза с глубины растворенный в крови азот превращается в пузырьки газа и закупоривает кровеносные сосуды, мешая движению крови.

Как же бороться с кессонной болезнью? Рецепт прост: надо переходить от повышенного подводного к нормальному атмосферному давлению очень медленно. Такой переход называют правилом декомпрессии. При медленном всплытии избыток азота успевает уходить через лёгкие, и у водолаза появление пузырьков в крови не происходит.

Следующая идея – это полностью изолироваться от воды и не испытывать на себе её давление. То есть, нужно сделать жёсткий скафандр. Действительно, жёсткий скафандр избавляет водолаза от высокого давления воды и опасности кессонной болезни. Он состоит из стального цилиндрического корпуса и шарнирно связанных с ним «рук» и «ног». В нём человек может



Водолазы в жёстком (слева) и мягком (справа) скафандрах долго находиться на глубинах до 200 м. Но, жёсткий скафандр имеет большую массу – более сотни килограмм, что затрудняет передвижение водолаза по дну.

Жак Ив Кусто (1910 – 1997)

Но и мягкий, и жёсткий скафандры обладают тем недостатком, что водолазы не могут отойти от судна дальше, чем позволяет шланг для подачи воздуха. Следующая идея в развитии водолазного дела – это брать с собой сжатый воздух. Изобретение получило название «акваланг» (лат. «*aqua*» – вода и «*lung*» – лёгкое). Изобретателем акваланга стал французский океанолог Жак Ив Кусто (1910 – 1997). Акваланг, наконец, дал возможность человеку двигаться под водой подобно рыбе. Акваланг позволяет выравнивать давление вдыхаемого воздуха до уровня давления воды, что даёт возможность дышать на глубине. Если же нам нужно провести под водой очень много времени, то можно взять с собой не один, а несколько баллонов. К сожалению, акваланг не решает проблемы кессонной болезни и поэтому погружаться с ним глубоко опасно. Аквалангисты обычно погружаются на глубину до 20 метров, лишь отдельные рекордсмены после длительных тренировок могут опуститься на глубину до 100 метров.

Это интересно

9.13. Подводные лодки и батискаф

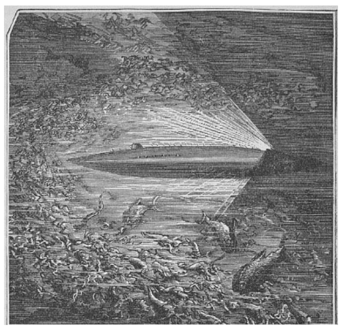
Идея подводных лодок пришла из наблюдений за рыбами. Их плавучесть обеспечивает плавательный пузырь (иногда его называют воздушным пузырем). Он находится в брюшной полости и представляет собой полупрозрачный мешочек, наполненный газом. Регулируя объём плавательного пузыря, рыба всплывает или погружается. Когда рыбе нужно опуститься на большую глубину, где давление воды больше, она уменьшает объём пузыря. Когда же ей нужно наверх, она увеличивает объём пузыря и всплывает.

Перенимая опыт плавания у рыб, можно создать подводный аппарат. Построим герметичную лодку с закрытым объёмом, напоминающим плавательный пузырь рыбы. Когда нужно погрузиться заполним его водой. Для всплытия вытесним воду, продув резервуар сжатым воздухом. Подводная лодка готова!

Еще сто пятьдесят лет тому назад такая лодка считалась фантастикой. В 1870 году вышел фантастический роман французского писателя Жюля Верна (1828 – 1905) «20 000 лье под водой». Жюль Верн свою подводную лодку назвал «Наутилус».

Жюль Верн (1828 – 1905)

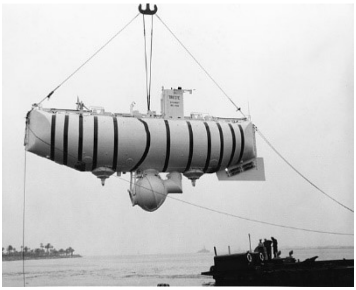
Современные подводные лодки превзошли фантазии Жюля Верна. Водоизмещение «Наутилуса» было около 1500 тонн, и он мог оставаться под водой несколько дней. Современные атомные подводные лодки имеют водоизмещение десятки тысяч тонн и могут плавать, не всплывая, несколько месяцев. В одном лишь отношении реальные подводные лодки отстают от фантастического «Наутилуса»: в глубине погружения. В романе «Наутилус» опускался на глубину в шестнадцать километров, которой просто не существует.



Наутилус

Глубина погружения современных подводных лодок достигает двух километров, дальнейшие погружение проблематично из-за высокого давления. Ведь воду нужно выдувать сжатым воздухом, а на глубине двух километров давление воды достигает 200 атмосфер. Компрессор может и не справиться.

Следующая идея – отказаться от идеи плавательного пузыря, то есть отказаться от воздуха, как средства для всплытия. Возьмем жидкость с плотностью меньше, чем у воды. Ведь жидкость несжимаема, и нам не нужно беспокоиться, что громадное давление ее раздавит. Так появился батискаф. Он состоит из двух частей: лёгкого корпуса и прочного корпуса. Лёгкий корпус наполнен бензином. Но бензин нужен не как топливо. Плотность



Батискаф «Триест»

бензина меньше воды, а значит, сила Архимеда стремится поднять корпус на поверхность. Но бензин – несжимаемая жидкость. Значит, корпусу не страшны громадные давления. Для опускания мы возьмем балласт – стальную дробь. Для подъёма на поверхность воды достаточно этот балласт сбросить. В прочном корпусе батискафа – находится его экипаж. Под водой батискаф приводится в движение электродвигателями, которые питаются от аккумуляторов. В батискафе человек достиг огромных глубин. В 1960 году швейцарский учёный Жак Пиккар и американец Дональд Уолш на батискафе «Триест» опустились на самое глубокое место нашей планеты – дно Марианской впадины, достигнув рекордной глубины в 11 километров.

Глава 10. Момент силы. Правило моментов.

Вернёмся к взвешиванию, которое древние умели делать достаточно точно. Для взвешиваний использовали равноплечные весы, то есть оба груза подвешивались на одинаковых расстояниях от оси (точки крепления) коромысла, как показано на рис. 10-1. Но точно отмерить два одинаковых расстояния очень сложно, поэтому Архимед задался вопросом, что изменится, если грузы расположатся на разных расстояниях от оси. Свои соображения он изложил в трактате: «О равновесии плоских фигур». Воспроизведём основные соображения Архимеда.

Первое правило: «Равные тяжести на равных длинах уравновешиваются». Данное правило легко обосновать из *соображений симметрии*. Поскольку соображениям симметрии приходится пользоваться достаточно часто поясним, что это такое.

Пусть на весах подвешены два одинаковых груза A и B (рис. 10-1.). Предположим противное, что грузы не уравновесятся, а, например, перевесит правый груз, т.е. перевесит груз B. Посмотрим на весы с другой стороны. Картина будет точно такой же, следовательно, должен также перевесить правый груз. Но теперь правым грузом является груз A. Значит, перевесит груз A. Но не могут же одновременно перевесить и груз A, и груз B. Противоречие. Следовательно, грузы A и B будут уравновешены.

Несмотря на очевидность первого правила Архимеда, здесь есть два важных момента.

Во-первых, говорится о расстоянии от оси (точки крепления) коромысла до точки подвеса грузов, но ничего не сказано о длине нитей, на которых висят грузы. Если нити невесомы, то их длина не имеет значения. Позже мы поймём, почему это важно.

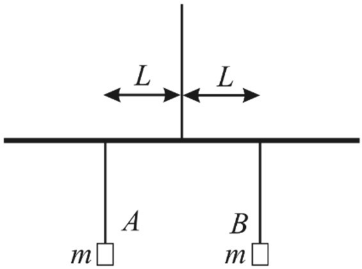


Рис. 10-1.
Весы с двумя одинаковыми грузами

Назовём расстояние от оси коромысла до линии, вдоль которой висит нить с грузом, ***плечом***. Обращаем внимание, что плечо – это расстояние от оси не до груза, а именно до нити. В данном случае плечи у обоих грузов одинаковые и равны L.

Во-вторых, Архимед не упоминает о форме грузов. Для него важна только их тяжесть, в современных терминах – масса. Может, Архимед считает грузы материальными точками? Нет. Архимед вводит понятие *центра массы (центра тяжести)* тела.

Что такое *центр масс* можно понять из следующего примера. Если мы положим на стол стержень (карандаш), привяжем к его концу нить и начнём поднимать за нить, то он начнёт вращаться (рис. 10-2, слева). Где нужно прикрепить нить, чтобы карандаш при подъёме не вращался, а находился в равновесии?

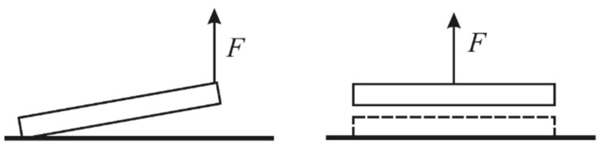


Рис. 10-2.
К понятию центра масс (центра тяжести)

Подберём такое положение нити, чтобы тело, поднимаясь, оставалось в равновесии. Будем говорить, что в этом случае нить проходит через *центр масс (центр тяжести)*. Где находится центр масс тела? Чуть позже мы дадим более точное определение и общий способ нахождения центра масс. У однородных (т.е. из одного материала без вмятин, царапин и пр.) симметричных тел из соображения симметрии центр масс должен находится в геометрическом центре тела. У шара – в центре шара, у цилиндра – в центре цилиндра, у однородного стержня – в его середине (рис. 10-2, справа).

Архимед выдвигает правило (назовём его правило №2), что равновесие не изменится, если груз заменить грузом такой же массы, подвешенный на таком же расстоянии за центр масс.

Теперь вслед за Архимедом проведём мысленный эксперимент. Считаем, что изначально весы уравновешены, а нити невесомы.

Подвесим два одинаковых груза массами m на расстояниях L от оси (точки крепления) коромысла до точек крепления грузов, как показано на рис. 10-1. То есть грузы подвешены на одинаковых плечах L. По правилу №1 равновесие весов сохранится.

Возьмём 4 одинаковых стержня массами $m/4$ длинами L и соединим их в один стержень массой m и длиной $4L$. Подвесим его за середину вместо правого груза, как показано на рис. 10-3, *a*). По правилу №2 равновесие сохранится.

Теперь будем тянуть за нить и поднимать стержень, пока он не коснётся коромысла весов, как показано на рис. 10-3, *b*). Поскольку равновесие не зависит от длины невесомой нити, то весы останутся в равновесии.

Закрепим стержень нитками по всей длине. Поскольку стержень при этом не двигался, то равновесие опять не нарушится. Нить, за которую мы поднимали стержень, нам уже не нужна, её можно убрать. Разделим стержень на части L, L и $2L$, прикрепим нити к серединам получившихся стержней. Отвяжем остальные нити. Стрежень по-прежнему не шевелился – равновесие не нарушалось.

Теперь опустим нити, как показано на рис. 10-3, *c*). Поскольку равновесие не зависит от длин нитей, то весы по-прежнему будут в равновесии.

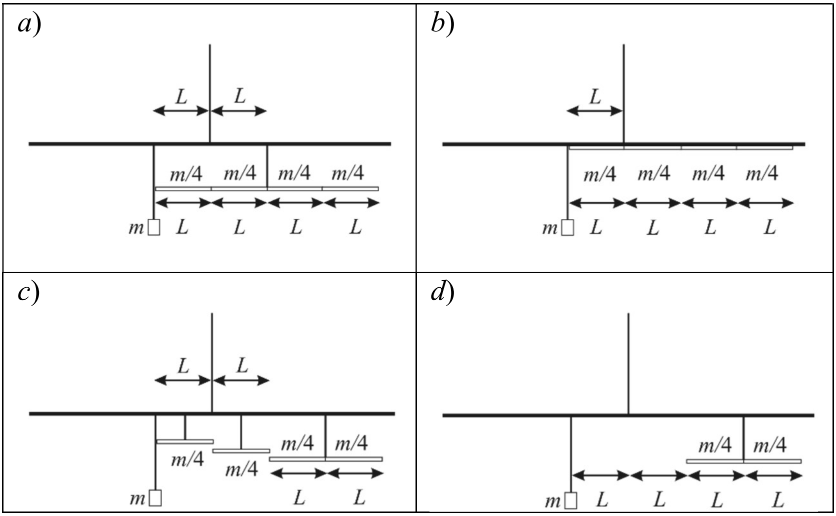


Рис. 10-3.
Равновесие гири и стержня:
a) гиря и стержень, *b*) стержень прижат к коромыслу,
c) гиря и разъединённые стержни, *d*) гиря и стержень на разных плечах.

Теперь два стержня длины L висят на одинаковых расстояниях $L/2$ от оси. По правилу №1 эти стержни можно убрать без нарушения равновесия. Получилось, что исходный груз массы m, висящий на плече L, уравновешивается грузом массой $m/2$, висящим на плече $2L$, как показано на рис. 10-3, *d*).

Аналогичным образом можно показать, что груз массы m, висящий на плече L, уравновешивается грузом $m/3$, висящим на плече $3L$ или грузом $m/4$, висящим на плече $4L$ и т.д. Архимед провёл рассуждения для любых соотношений грузов и показал, что весы будут в равновесии, если будет соблюдаться равенство:

$$m_1 L_1 = m_2 L_2, \qquad (10.1)$$

где m_1 и m_2 – массы грузов, а L_1 и L_2 – плечи, на которых они подвешены (рис. 10-4).

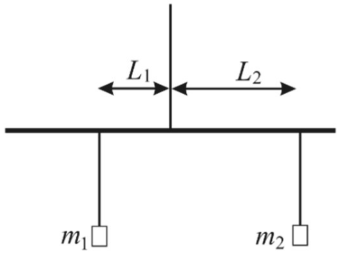


Рис. 10-4.
Условие равновесия весов

Поскольку Архимед говорил не о массе гирек, а о их тяжести, запишем уравнение (10.1) именно как равенство сил. Для этого нужно вспомнить, что силу тяжести мы определяем как произведение mg:

$$m_1 g L_1 = m_2 g L_2.$$

Назовём силу тяжести, умноженную на плечо, *моментом силы относительно оси вращения*.

Термин «момент силы» не очень удобен, поскольку слово «момент» в русском языке ассоциируется со временем, но такой термин есть, и нам остаётся им пользоваться. Обычно момент силы обозначается буквой M. Уравнение запишется в виде:

$$M_1 = M_2. \qquad (10.2)$$

Прекрасно, что такие длинные рассуждения привели к такой компактной формуле. Если к коромыслу приложено несколько сил, то для равновесия нужно равенство сумм моментов сил, приложенных к правому и левому коромыслу. В общем случае можно сформулировать *правило моментов сил*.

Коромысло весов будет находиться в равновесии, если сумма моментов сил, вращающих его по часовой стрелке, равна сумме моментов сил, вращающих его против часовой стрелки.

Правило моментов можно применять не только к телу, закреплённому на оси, но и к любому телу, если моменты будут равны относительно любой возможной оси вращения. Дополним правило моментов.

Пусть имеется неподвижное тело. Тогда оно не будет вращаться, если относительно любой оси вращения сумма моментов сил, вращающих его по часовой стрелке, равна сумме моментов сил, вращающих его против часовой стрелки.

Рассмотрим несколько задач с использованием правила моментов сил. Во всех задачах в отсутствии груза и гирек весы уравновешены.

Задача №1. Задача Архимеда.

Когда груз положили на левую чашу весов, то, чтобы его уравновесить, потребовались гирьки общей массой m_1. Затем груз переложили на правую чашу и уравновесили его гирьками общей массой m_2. Найдите массу груза.

Решение. Пусть масса груза m, плечи весов равны L_1 и L_2. Запишем правило моментов для обоих взвешиваний:

$$mgL_1 = m_1 g L_2,$$
$$mgL_2 = m_2 g L_1.$$

Выразив L_2 из 1-го уравнения и подставив во второе получим:

$$m\frac{mL_1}{m_1} = m_2 L_1, \text{или}$$
$$m = \sqrt{m_1 m_2}.$$

Ответ: $m = \sqrt{m_1 m_2}$.

Задача №2. Тяжёлый однородный рельс массы m лежит на двух опорах, расположенных на расстояниях L_1 и L_2 от центра рельса. Найти с какими силами рельс давит на опоры.

Решение. Поскольку сказано, что рельс однородный, то его центр масс расположен посередине. Обозначим силы, с которыми опоры действуют на рельс, N_1 и N_2. Таким образом, на рельс действуют три силы: сила тяжести mg и силы реакции опоры: N_1 и N_2. (рис. 10-5).

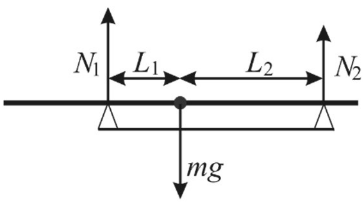


Рис. 10-5.
Рельс на двух опорах

Запишем правило моментов относительно левой опоры:

$$mgL_1 = N_2(L_1 + L_2).$$

Запишем правило моментов относительно правой опоры:

$$mgL_2 = N_1(L_1 + L_2).$$

Преобразуем: $N_1 = \frac{mgL_2}{L_1+L_2}$, $N_2 = \frac{mgL_1}{L_1+L_2}$.

Ответ: $N_1 = \frac{mgL_2}{L_1+L_2}$, $N_2 = \frac{mgL_1}{L_1+L_2}$.

Замечание 1. Видно, что $N_1 + N_2 = mg$, т.е. сумма сил реакций опор равны силе тяжести рельса.

Замечание 2. Также видно, что силы реакций опор будут равны только в случае $L_1 = L_2$, т.е. когда рельс лежит на опорах симметрично.

Замечание 3. Если бы рельс лежал на трёх опорах, задача не имела бы однозначного решения. Действительно, малейшие перемещения третьей опоры – на миллионные доли миллиметра приводили бы к тому, что третья опора не касалась бы груза (сила реакции опоры равна нулю), или наоборот, принимала бы на себя значительный вес, делая не нужным одну из оставшихся опор. Чтобы решить задачу с тремя опорами, нужно рассматривать упругие свойства рельса, поскольку любой реальный рельс имеет прогиб, пусть даже он не заметен «на глаз».

Замечание 4. Аналогично можно рассмотреть задачу с рельсом, подвешенным на двух канатах (тросах). Важно понимать, что натяжения канатов не всегда одинаковы, один канат может быть натянут сильнее и может оборваться. Об этом следует помнить при подъёме тяжёлых предметов.

Задача №3. На лёгком коромысле подвешены грузы: m_1 и m_2 на расстояниях L_1 и L_2 от левого конца соответственно ($L_1 < L_2$). На каком расстоянии от левого конца нужно закрепить ось, чтобы коромысло оставалось в равновесии (рис. 10-6)?

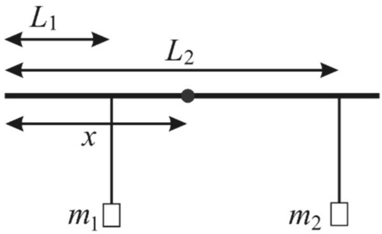


Рис. 10-6.
Нахождение точки равновесия

Решение. Обозначим искомое расстояние за x. Тогда левый груз будет находится от точки крепления на расстоянии ($x - L_1$), а правый – на расстоянии ($L_2 - x$). Запишем правило моментов для этого случая:

$$m_1 g(x - L_1) = m_2 g(L_2 - x).$$

Преобразуем: $x = \frac{m_1 L_1 + m_2 L_2}{m_1 + m_2}$.

Ответ: $x = \frac{m_1 L_1 + m_2 L_2}{m_1 + m_2}$.

Расширим задачу на N грузиков.

Задача №4. На лёгком коромысле весов подвешены грузы: m_1, m_2 … m_N на расстояниях L_1, L_2 и L_N от левого конца ($L_1 < L_2 <\ldots< L_N$). Доказать, что если закрепить ось в точке O на расстоянии:

$$x = \frac{m_1 L_1 + m_2 L_2 + \ldots + m_N L_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}, \qquad (10.3)$$

то коромысло останется в равновесии (рис. 10-7).

Решение. Пусть точка O находится между длинами L_k и L_{k+1}. Проверим выполнение правила моментов:

$$m_1 g(x - L_1) + m_2 g(x - L_2) + \cdots + m_k g(x - L_k) =$$
$$= m_{k+1} g(L_{k+1} - x) + \ldots + m_N g(L_N - x).$$

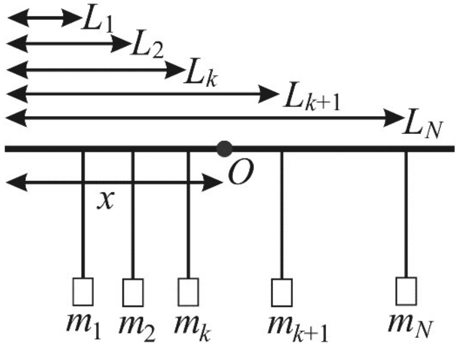


Рис. 10-7.
Нахождения центра масс для нескольких грузов

Преобразуем:

$$x(m_1 + m_2 + \cdots + m_k + m_{k+1} + \cdots + m_N) =$$
$$= m_1 L_1 + m_2 L_2 + \ldots + m_k L_k + L_{k+1} L_{k+1} + \ldots + m_N L_N.$$

С учётом (10.3) получается тождество. Что и требовалось доказать.

Мы уже определяли *центр масс* (*центр тяжести*) как точку, за которую можно поднять тело, чтобы оно не вращалось. Если поднимать коромысло весов за точку O, то коромысло будет сохранять горизонтальное положение. Следовательно, точка O будет центром масс, а формула (10.3) позволяет *вычислять положение центра масс*.

Понятие центра масс Архимед расширил для плоских фигур. Переводя на современный математический язык, можно сказать, что Архимед предложил мысленно разделить фигуру на множество узких полосок, перпендикулярных оси x, как показано на рис. 10-8. Для каждой k-ой полоски можно определить её массу m_k и координату x_k, а затем вычислить координату x центра масс по формуле:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}. \qquad (10.4)$$

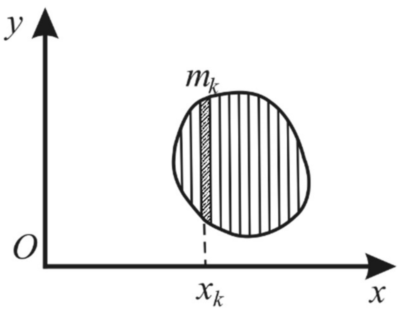


Рис. 10-8.
Нахождение центра масс плоской фигуры

Затем нужно мысленно разделить фигуру на множество узких полосок, перпендикулярных оси y и аналогичным образом найти координату y центра масс:

$$y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}.$$

Если фигура объёмная, например, пирамида, то можно, нарезав её «ломтиками» как кусок сыра, рассчитать и третью координату центра масс:

$$z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}.$$

Архимед рассчитал, что центр масс треугольника лежит на пересечении его медиан. Он также рассчитал положение центра масс для сегмента параболы и др. фигур. Сегодня, используя возможности компьютеров, можно рассчитать положение центра масс тела любой формы. Подробнее этот вопрос разобран в Приложении №3.

Центр масс плоской фигуры несложно определить экспериментально. Для этого её нужно подвесить за точку *A*, как показано на рис. 10-9. Центр масс будет лежать на вертикали (продолжении нити), проведённой к точке подвеса *A*. Затем подвесим фигуру за точку *C* и отметим вертикаль *CD*. Пересечение линий *AB* и *CD* покажет положение центра масс.

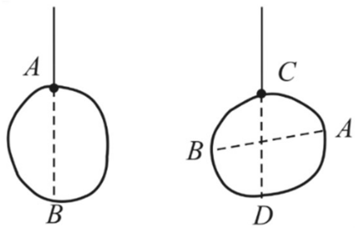


Рис. 10-9.
Экспериментальное определение центра масс плоской фигуры

Сделай сам

Попробуйте вырезать из плотной бумаги или картона треугольник и убедиться таким методом, что центр масс находится на пересечении медиан. При проведении эксперимента нужно следить, чтобы бумага оставалась плоской и не сворачивалась в трубочку. Кроме этого, бумага должна быть однородной – не грязной, не намокшей и пр.

Глава 11. Устойчивость тел

Правило моментов и умение находить центр масс позволила Архимеду решить важную практическую задачу – обеспечить устойчивость как наземных строений, так и морских кораблей.

Начнём с простого примера. Можно ли поставить вертикально палочку (не заточенный карандаш)? На рис. 11-1 (№1) показаны центр масс карандаша – точка O и основание AB. Если карандаш отклонится незначительно, и точка O будет над отрезком AB, то сила тяжести вернёт карандаш в вертикальное положение (рис. 11-1, №2). Если же наклонить карандаш сильнее, и центр масс не будет над опорой AB, то сила тяжести опрокинет карандаш, он упадёт (рис. 11-1, №3). Чтобы сделать карандаш более устойчивым, можно прикрепить к низу тяжёлый «балласт», например, пластилин. Тогда центр масс переместится из точки O в C, и при отклонении на тот же угол центр масс будет над опорой AB (рис. 11-1, №4).

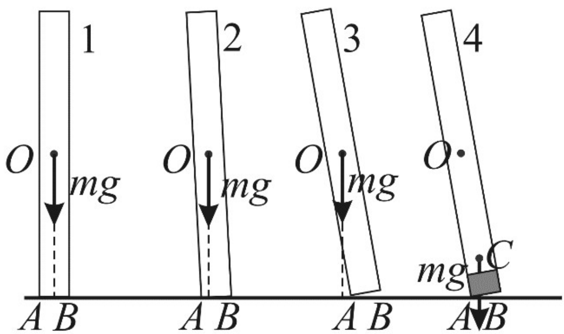


Рис. 11-1.
Карандаш упадёт, если центр масс не будет над опорой

Пример с карандашом показывает: 1) тело устойчиво, если центр масс тела находится над опорой, а не сбоку от неё; 2) чем ниже центр масс, тем устойчивее тело.

Карандаш достаточно лёгкий и для его падения достаточно небольшого толчка или дуновения ветра. Александрийская колонна в Петербурге тоже стоит за счёт своего веса. Однако её масса более 600 тонн – ветром не сдуешь.

Александрийская колонна

Скорее всего, Вы замечали, что позиция, когда человек вытянулся «в струнку», и его ноги прижаты друг к другу, не очень устойчивая. Для большей устойчивости нужно развести ноги на ширину плеч, выставить одну ногу чуть вперёд и немного присесть, чтобы опустить свой центр масс. Именно в такой позе начинают соревноваться борцы.

Для устойчивости нужно опускать центр масс как можно ниже. Это хорошо видно ещё на одном примере. Есть такая игрушка: «Ванька – встань-ка». Её особенность в том, что её нельзя опрокинуть набок – она обязательно вернётся в вертикальное положение. «Секрет» ясен из рис. 11-2. В нижней части относительно лёгкой игрушки расположен тяжёлый груз. Центр масс (точка *B*) расположен достаточно низко, и из любого положения сила тяжести стремится вернуть игрушку в вертикальное положение.

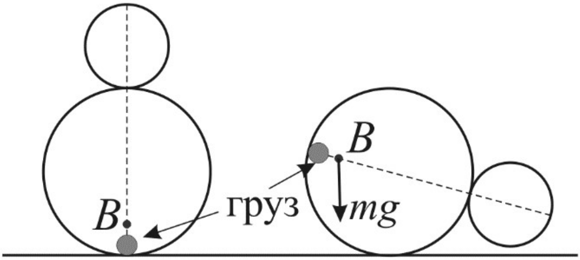


Рис. 11-2.
Ванька – встань-ка

Памятник Ваньке-встаньке, Котовск, Тамбовская обл.

Архимед определил условие устойчивого плавания корабля. Рассмотрим плавающий в спокойной воде корабль, как показано на рис. 11-3. Область вытесненной кораблём воды показана штриховкой. Пусть точка A – центр масс вытесненной воды, а точка B – центр масс корабля. Если корабль накренится на правый бок, как показано на рис. 11-3, справа, то сила Архимеда, которая приложена к точке A, и сила тяжести, приложенная к точке B, будут стремиться развернуть корабль обратно и вернуть его в вертикальное положение. Таким образом, можно сформулировать общее правило устойчивого плавания корабля:

Чтобы корабль плавал устойчиво, нужно, чтобы центр масс корабля находился ниже центра масс вытесненной кораблём воды.

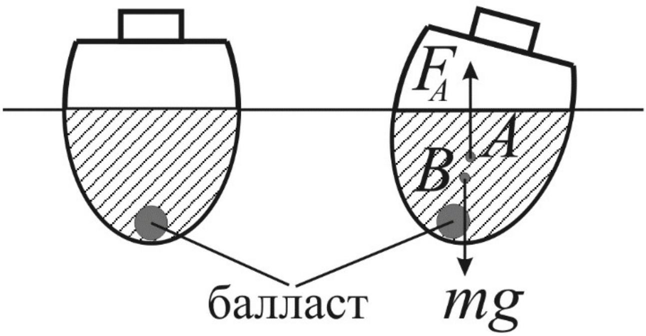


Рис. 11-3.
Устойчивое плавание корабля

Те, кто плавали на байдарках знают, что байдарки легко переворачиваются. Обычные лодки более устойчивы, чем байдарки, а катамараны ещё устойчивее. Чем определяется устойчивость судна к перевороту?

Для большей устойчивости корабля нужно опустить его центр масс как можно ниже. Поэтому в трюм корабля помещают дополнительный груз, называемый *балластом,* как показано на рис. 11-3. Мы уже обсуждали, что консервная банка будет плавать более устойчиво, если на её дно положить груз.

Байдарка – лёгкая лодка, и её центр масс с учётом сидящего в ней человека расположен высоко, поэтому она неустойчива. В байдарке нужно сидеть, располагаясь как можно ниже, и ни в коем случае не вставать. Встав в байдарке, Вы поднимите Ваш центр масс, что может привести к опрокидыванию. Вставать опасно даже в обычной лодке.

Это интересно

Почему не падали мачты на парусниках?

Мачты на парусниках были длинными, имели малое основание и, к тому же, были нагружены парусами в верхней части. Такая конструкция должна была быть неустойчивой. Почему же мачты не падали?

Дело в том, что мачту со всех сторон поддерживали канаты, которые крепились к бортам. Именно благодаря им мачта не могла упасть, не порвав канат, а канаты делали прочными. Другое дело, что сильный ветер мог наклонить и опрокинуть судно. Поэтому при приближении бури часть парусов убирали.

Останкинская телебашня

Это интересно

Почему не падает Останкинская башня?

Останкинская телевизионная башня в Москве имеет высоту 540 метров. При этом к ней наверху присоединена смотровая площадка, что делает такую конструкцию очень неустойчивой. Почему Останкинская башня не падает?

Останкинскую башню держат стальные тросы. Только расположены они не снаружи, а внутри трубы, образующую башню.

Памятник Николаю I

Это интересно

Уникальная статуя

В Петербурге напротив Исаакиевского собора стоит уникальная статуя всадника на коне. Это памятник императору Николаю I работы скульптура Петра Карловича Клодта (1805 – 1867). Он был открыт в 1859 году. Уникальность заключается в том, что 6-ти метровая статуя весом более 21 тонны опирается всего на две точки – задние ноги коня. Чтобы положение статуи было устойчивым, необходимо, чтобы центр масс располагался над отрезком, соединяющим копыта коня. Иначе вряд ли памятник простоял бы более 100 лет. Остаётся только удивляться искусству скульптора, выполнившего столь сложную работу.

Глава 12. Рычаг

Хочется ли Вам стать сильнее? Вряд ли найдётся кто-нибудь, кто сказал бы, что хотел бы стать слабее. Известно, что силу мышц можно увеличить путём длительных тренировок. Но как быть, если требуется очень большая сила? Например, нужно поднять автомобиль, причём поднять его надо сейчас. Здесь одной силой рук не обойтись, нужно приложить силу ума.

В глубокой древности были изобретены механические устройства, позволяющие многократно увеличить силу человека. Простейшими из них были рычаг, блок и клин (наклонная плоскость). Они применялись с древнейших времён.

Что такое рычаг можно понять на примере обычной двери. Попробуйте открыть её, толкая за дверную ручку. Если дверь не заперта, сделать несложно. А теперь откройте эту же дверь, толкая её возле петель. (Осторожно – не прищемите пальцы!). Это сделать намного сложнее. Усилие одно и то же, а результат другой. В физике это называется *правилом рычага*: чем больше расстояние от места приложения силы до оси, тем легче повернуть дверь. Рычагом может послужить простая палка. Если нужно поднять тяжёлый груз, например, камень, то это можно сделать, поддев его длинной палкой и приложив силу F к концу палки, как показано на рис. 12-1.

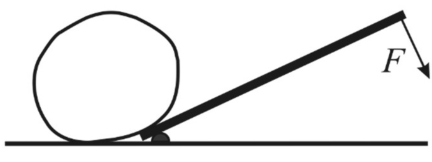
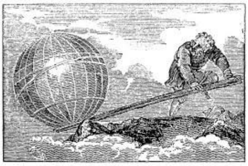


Рис. 12-1.
Рычаг

Но одно дело применять на практике, другое – провести точные расчёты. Пусть имеется рычаг с плечами L_1 и L_2, как показано на рис. 12-2. Пусть мы прикладываем к длинному концу силу F, с другого конца рычаг уравновешивается грузом m. Применим правило моментов:

$$mgL_1 = FL_2.$$



Архимед и Земля

Взяв соотношение плеч один к десяти, мы увеличим нашу силу в 10 раз! Говорят, что Архимед, создавший множество механизмов на основе рычага, воскликнул: «Дайте мне точку опоры, и я поверну Землю». Конечно, он преувеличил, как говорится, «для красного словца». Этой фразой он хотел показать огромные возможности рычага.

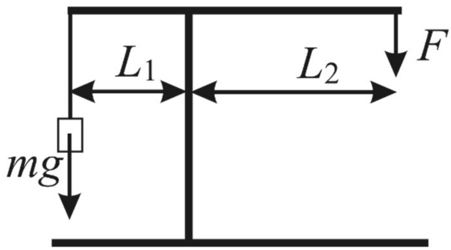


Рис. 12-2.
Правило рычага

Мы используем правило рычага довольно часто, иногда не замечая этого – например, когда колем орехи. Орехи колоть достаточно легко, если сжимать щипцы за концы. Так момент силы рук больше, и он преодолевает момент сил упругости скорлупы. Если же взять щипцы посредине, то раскалывать скорлупу становится намного труднее.

Обратите внимание на поворот руля на велосипеде. Руль легче поворачивать, держась за его концы. Если взяться за руль близко к оси, повернуть его значительно сложнее. Гаечный ключ – это тоже рычаг. Пальцами гайку можно в лучшем случае насадить.

Чтобы её крепко затянуть, нужно приложить большую силу, взявшись за конец гаечного ключа. Чем ключ длиннее, тем можно сильнее завернуть гайку. Но здесь важно не переусердствовать и не сорвать резьбу.

Мы используем правило рычага, когда копаем лопатой землю, поднимаем тяжёлый груз с помощью железной палки (лома), пользуемся клещами, кусачками для проволоки, щипцами и др. слесарными инструментами, рычагами управления на токарных станках, на коробке передач автомобиля… всего не перечислишь.

Правило рычага применимо не только для прямого стержня, но и для вращающегося колеса. Рассмотрим такое устройство, как лебёдка. Она используется, когда нужно получить очень большую силу. Например, кабестан или лебёдка с вертикальной осью представляет собой большое колесо, которое вращает несколько человек, и на которое наматывается прочный канат. Работники толкают колесо как можно дальше от центра, а канат привязан ближе к оси, как показано на рис. 12-3.

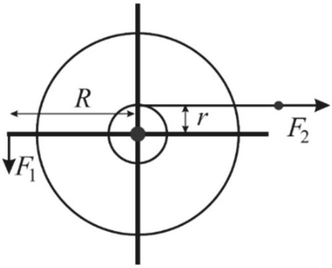


Рис. 12-3.
Кабестан (вид сверху)

Обозначим внешний радиус кабестана с учётом длины выступающих рычагов – R, а радиус кольца, к которому привязан канат – r. Пусть для простоты кабестан вращает один работник. Тогда момент силы этого работника равен $M_1 = F_1R$, где F_1 – сила, прикладываемая работником. На груз будет действовать сила F_2, а её момент будет равен $M_2 = F_2 r$.

По правилу моментов кабестан начнёт вращаться, когда момент силы M_1 превысит M_2:

$$F_1 R \geq F_2 r, \qquad F_1 \geq F_2 \frac{r}{R}.$$

С помощью кабестана можно поднять или переместить большой груз. Например, раньше так вытягивали на берег корабли для ремонта. Несколько человек, вращая кабестан, создавали огромный момент сил, которой превышал момент сил трения корабля, и корабль вытягивался на берег. В фильмах Вы могли видеть, как группа из нескольких матросов (якорная команда) с помощью кабестана поднимают тяжёлый морской якорь. Штурвал на корабле – тоже рычаг, именно поэтому его делали таким большим. До эпохи электродвигателей паромные переправы также делали с помощью кабестана, на который наматывался длинный канат, протянутый между берегами. Такой деревянный паром с двумя крепкими парнями можно увидеть в заповеднике деревянного зодчества в Мандроги. Кажется невероятным, что два человека способны перемещать такой большой паром! Но, во-первых, по воде буксировать намного легче, чем тащить по земле, а во-вторых, здесь используется правило рычага.

Паром с ручной тягой

С помощью рычага один человек может повернуть целый дом! В старину ветряные мельницы крепили на одном столбе в центре мельницы, чтобы их можно было поворачивать по ветру. Такую мельницу можно увидеть в музее-заповеднике «Кижи». На рис. 12-

4, слева, видна мельница, а на рис. 12-4, справа, – отдельно фото поворотного бревна, насаженного на деревянную ось. Мельник с помощью рычага 1 крутил бревно 2, от бревна 2 усилие человека через канат передавалось на рычаг 3, который поворачивал мельницу вокруг оси 4.

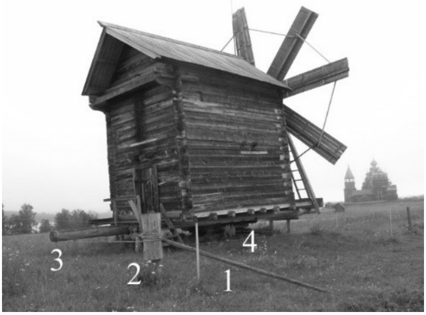


Рис. 12-4.
Поворачивающаяся мельница

Колодец с ручным подъёмом ведра

С вращающимися рычагами нам приходится иметь дело в повседневной жизни, например, когда мы закручиваем или откручиваем винт (шуруп) отвёрткой. Без отвёртки крепко закрученный винт открутить не получится. Чем больше диаметр отвёртки, тем легче ею отвернуть винт. Лебёдку с горизонтальной осью используют для поднятия ведра с водой из колодца. Она надёжнее электронасосов, поскольку не зависит от электричества. Лебёдки на судах, на стройках и др. используются и в наши дни. Правда, сегодня их обычно вращают не руками, а электродвигателями.

Это интересно

Коготь Архимеда

Метательные машины известны с незапамятных времён. У греков они назывались баллистами, у римлян – катапультами. Также широко использовались осадные машины. При штурме Сиракуз – родного города Архимеда боевые машины защитников города не позволили римлянам взять город штурмом. Вот как это описывает греческий историк Плутарх.

> На вражеские суда вдруг стали опускаться укреплённые на стенах брусья и либо топили их силою толчка, либо, схватив железными руками или клювами вроде журавлиных, вытаскивали носом вверх из воды, а потом, кормою вперёд, пускали ко дну, либо, наконец, приведённые в круговое движение скрытыми внутри оттяжными канатами, увлекали за собою корабль и, раскрутив его, швыряли на скалы и утёсы у подножия стены, а моряки погибали мучительной смертью. Нередко взору открывалось ужасное зрелище: поднятый высоко над морем корабль раскачивался в разные стороны до тех пор, пока все до последнего человека не оказывались сброшенными за борт или разнесёнными в клочья, а опустевшее судно разбивалось о стену или вновь падало на воду, когда железные челюсти разжимались.

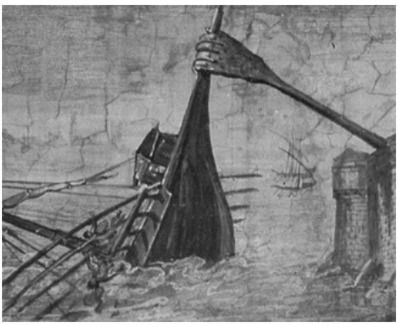


Рис. 12-5.
Коготь Архимеда

На рис. 12-5 показан фрагмент фрески Луиджи Париджи (1571 – 1635) с изображением «когтя Архимеда», сделанным по описаниям этой машины древними авторами. Реалистично ли оно? В 2005 году была проведена реконструкция когтя Архимеда, который показал свою работоспособность.

Глава 13. Золотое правило механики, механическая работа, мощность

Предыдущие примеры показывают нам, что с помощью рычага можно получить выигрыш в силе, но этот выигрыш даётся не просто так. Дело в том, что, *выигрывая в силе, мы проигрываем в пути*.

Действительно, толкая дверь около ручки, её легче повернуть, чем толкая около петель, но путь, который при этом проходит рука, больше. Во сколько же раз мы проигрываем в пути?

Рассмотрим рычаг с плечами L_1 и L_2, как показано на рис. 13-1. Пусть под действием силы F_2 рычаг повернётся на небольшой угол. Применяя формулу (10.1), мы получим, что выигрыш в силе составит L_2/L_1 раз. Как относятся пути AB и CD? Из рис. 13-1 видно, что треугольники OAB и OCD подобны. Составим отношение подобия:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OC} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Следовательно, короткий конец рычага проходит путь в L_1/L_2 раз меньше, чем длинный.

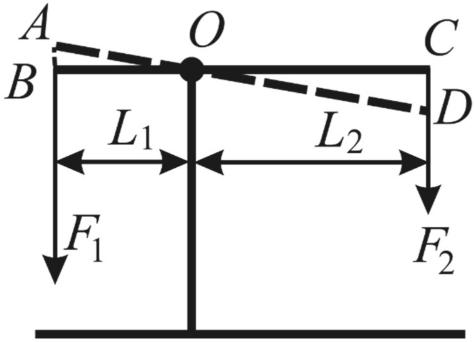


Рис. 13-1.
Золотое правило механики

Будет ли такая же ситуация с кабестаном? Используя кабестан (рис. 12-3), мы получаем выигрыш в силе в R/r раз. Длина окружности радиуса r равна $2\pi r$. Применяя эту формулу, мы получаем, что работникам приходится проходить путь в R/r раз больше, чем перемещаемый груз. Эти и другие примеры использования рычага позволяют сформулировать, так называемое, *золотое правило механики*:

Во сколько раз мы выигрываем в силе, во столько же раз мы проигрываем в пути.

Таким образом, из золотого правила механики следует, что рычаг изменяет силу, но не меняет произведения силы на путь. Величина, равная произведению силы, действующей на тело, на путь, который тело прошло, настолько важна, что для неё придумали специальное название – *(механическая) работа*.

Механической работой называют произведение силы F на пройденный путь L. Сила должна быть приложена вдоль движения тела.

Работу обычно обозначают буквой A:

$$A = FL.$$

В СИ работу измеряют в джоулях в честь английского физика Джеймса Джоуля (1818 – 1889). 1 джоуль (1 Дж) – эта работа, которую совершает сила в 1 ньютон, перемещая тело на 1 метр.

Под работой в физике понимают не то же, что в повседневной жизни. Например, решение математических задач в механике работой не считают. Речь идёт о работе механизмов. И работу оценивают по тому, какой груз на какое расстояние механизм передвинул.

Используя понятие работы, золотое правило механики можно сформулировать так:

Используя рычаги и др. простые механизмы, мы можем выиграть в силе, но не можем выиграть в работе.

С понятием работы связано понятие *мощности* – способности совершить работу за единицу времени.

Мощностью называется отношение произведённой работы ко времени, за которое эта работа была совершена.

Мощность обычно обозначают буквой *N*:

$$N = \frac{A}{t}.$$

В СИ мощность измеряют в *ваттах* в честь шотландского инженера Джеймса Уатта (1736 – 1819), изобретателя паровой машины. 1 ватт (1 Вт) – эта мощность механизма, совершающего работу 1 джоуль за 1 секунду.

Это интересно

Лошадиная сила

Когда Джеймс Уатт создал паровую машину, он стал её рекламировать, указывая сколько лошадей может заменить его машина. Речь шла, в первую очередь о лошадях, приводящих в действие водяной насос или поднимающих груз. Для этого он ввёл понятие «*лошадиной силы*» и измерял мощность паровой машины в лошадиных силах. Здесь возникла некоторая путаница, поскольку введённая «лошадиная сила» – это единица *мощности*, а не силы. Сегодня «лошадиная сила» иногда используется в технической литературе как внесистемная единица, а единица мощности в СИ – ватты. Принято считать, что 1 лошадиная сила (1 л.с.) равна 745,5 Вт. Эту величину часто округляют до 746 Вт.

Это интересно

Зачем велосипеду переключатель скорости?

Проявление золотого правила механики можно увидеть в переключателе скорости на велосипедах. Как он устроен? В простейшем варианте на оси заднего колеса велосипеда размещено несколько «звёздочек» – шестерёнок, на которые может надеваться велосипедная цепь. При переключении скорости цепь перескакивает с одной звёздочки на другую. Крутя педали, мы прикладываем силу, которая через цепь передаётся на заднее колесо. Чем больше звёздочка на заднем колесе, тем больший момент силы мы прикладываем к колесу. Когда мы въезжаем на горку, для преодоления силы тяжести нужно приложить к колесу как можно больший момент силы, следовательно, нам выгодно переставить цепь на самую большую звёздочку.

Переключатель скоростей

Но зачем тогда нужны остальные звёздочки? Золотое правило говорит, что, выигрывая в силе, мы проигрываем в расстоянии, т.е. в скорости движения. Делая один оборот педалями, мы поворачиваем большую звездочку два – три раза (на разных велосипедах это соотношение может быть различным). Если же цепь набросить на маленькую звёздочку, то за один оборот педалей она повернётся десять раз. Таким образом, поставив цепь на маленькую звёздочку, мы можем развить скорость в несколько раз большую, чем если бы цепь стояла на большой звёздочке. При подъёме в гору, когда велосипедисту нужно прикладывать большую силу, выгодно использовать большую звёздочку, а на ровной дороге, чтобы развить большую скорость, цепь нужно переключить на маленькую звёздочку.

Переключатель скорости есть не только на велосипедах, но также на мотоциклах и автомобилях. Устроены они сложнее, чем у велосипеда, но принцип действия такой же.

Глава 14. Блок

Ещё одно устройство для перемещения тяжести, которое известно с незапамятных времён и применяется сегодня – это блоки. Их можно увидеть на любой стройке, на любом подъёмном кране. Бывают разные блоки. На рис. 14.1 показаны простейшие блоки: неподвижный (слева) и подвижный (справа). При рассмотрении блоков обычно пренебрегают трением в оси и считают, что массы блока и нити (каната, троса) намного меньше массы перемещаемых грузов, то есть массой нити пренебрегают.

Одинаково ли натяжение нити на её разных участках? В указанных выше приближениях силу натяжения можно считать одинаковой вдоль всей нити. Если бы натяжение нити было различным, то нить должна была двигаться в сторону большей силы. Причём, чем легче нить, тем быстрее она должна была бы двигаться. Невесомая нить должна была бы двигаться бесконечно быстро, что невозможно. Подробнее этот вопрос будет обсуждён при изучении законов Ньютона.

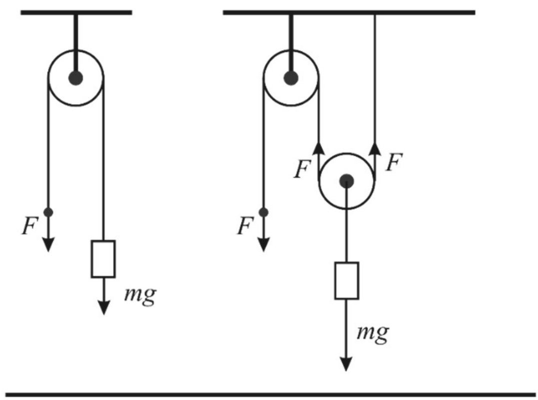


Рис. 14-1.
Неподвижный (слева) и подвижный (справа) блоки

Неподвижный блок позволяет изменить направление силы: в данном случае мы прикладываем внешнюю силу вниз, а блок превращает её в силу, тянущую груз вверх. Это очень удобно при подъёме грузов.

Простой неподвижный блок не даёт выигрыша в силе. В случае подвижного блока, если мы тянем за нить с силой F, то блок с грузом поднимают две нити. Поскольку сила натяжения нити (каната) одинакова по всей длине, то получается, что на груз действует сила $2F$, т.е. блок позволяет удвоить прилагаемую к грузу силу.

По золотому правилу выигрыш в силе должен сопровождаться проигрышем в перемещении. Проверим это. Пусть в системе блоков на рис. 14-2 все участки нити, не лежащие на блоках – вертикальны. Длина участков нитей, лежащих на блоках, не меняется. Найдём длину остальной нити.

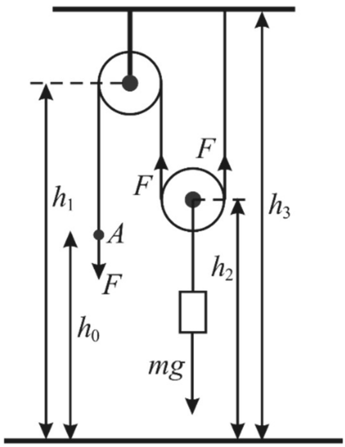


Рис. 14-2.
Вычисление перемещения подвижного блока

Обозначим высоту оси неподвижного блока – h_1, подвижного – h_2, крепления к потолку – h_3, точки A (где приложена сила F) – h_0.

Тогда длина нити (кроме участков на блоках) равна:

$$L = (h_1 - h_0) + (h_1 - h_2) + (h_3 - h_2).$$

Пусть под действием силы точка A опустилась на величину x_1, а подвижный блок поднялся на высоту x_2. Тогда длина каната вычисляется по формуле:

$$L = (h_1 - h_0 - x_1) + (h_1 - h_2 + x_2) + (h_3 - h_2 + x_2).$$

Сравнивая две последние формулы получим:

$$x_1 = 2x_2.$$

Получилось полное соответствие золотому правилу: выигрыш в силе в 2 раза приводит к проигрышу в перемещении тоже в 2 раза.

Может показаться, что блок проигрывает рычагу, поскольку даёт выигрыш в силе всего в 2 раза. Но можно соединить несколько блоков и получить выигрыш в 4, 8, 16 и т.д. раз (рис. 14-3). Такое устройство называется *полиспаст* (от греч. «много» и «тянуть»). Разумеется, полиспаст даёт выигрыш в силе и такой же проигрыш в перемещении.

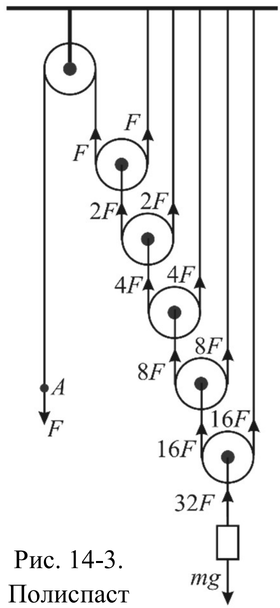
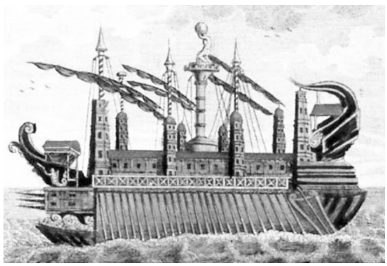


Рис. 14-3. Полиспаст

По легенде Архимед использовал полиспаст, чтобы вытащить на берег огромный корабль. При этом он обещал правителю Сиракуз, что сделает это один. Канат Архимед при этом тянул с помощью большой лебёдки. На суше для передвижения корабля Архимед использовал катки.



Корабль «Сиракузия»

Согласно легенде, Архимед справился с задачей. По другой версии легенды Архимед один спустил на воду «Сиракузию» – самый большой в мире корабль того времени. Проектировал этот корабль также Архимед. Ещё Архимед для откачки воды из «Сиракузии» создал *архимедов винт*, о котором речь впереди.

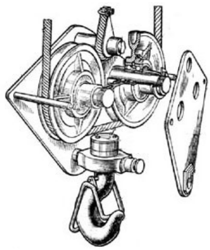
Это интересно

Крепление подъёмного крана

Подвижные блоки в том или ином варианте используются на всех современных подъёмных кранах – груз крепится не на одном, а на нескольких тросах. Почему?

Дело в том, что если крепить груз на одном тросе, то в случае внезапного обрыва троса груз будет лететь вниз с ускорением свободного падения, и достигнет земли за 1-2 секунды. Стоящие близко к месту падения груза рабочие не успеют отреагировать. Если тросов два или больше, то, во-первых, получается выигрыш в силе (полиспаст), во-вторых, в случае обрыва одного троса, подвижный блок, к которому прикреплён груз, не сразу упадёт, а начнёт вращаться, постепенно разматывая оборванный трос. Время падения груза заметно возрастёт, и рабочие успеют отбежать на безопасное расстояние. Помните, что под грузом стоять нельзя, на стройке детям находиться нельзя, там могут быть только рабочие, которые должны всё время носить защитные каски!





Крепление крана

Глава 15. Наклонная плоскость, клин, винт

Для подъёма тел с незапамятных времён используется наклонная плоскость, (клин). Понятно, что вкатить груз на тележке по наклонной плоскости легче, чем поднимать его вертикально вверх (рис. 15-1). Чем меньше угол у наклонной плоскости – тем проще вкатывать груз, но и тем больше нужно преодолеть путь, чтобы подняться на определённую высоту. Подняться в гору по петляющей тропинке проще, чем лезть на такую же высоту по шесту или канату.

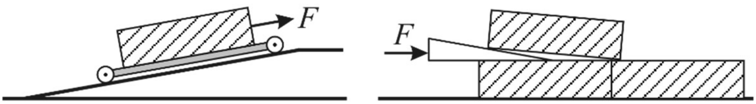


Рис. 15-1.
Наклонная плоскость и клин

Клин можно использовать, когда нужно приподнять что-то тяжёлое или раздвинуть предметы. Подкладывая клин под тяжёлую мебель и вбивая его молотком, можно приподнять даже очень тяжёлые предметы. Прикладывая усилия к основанию клина, мы получаем выигрыш в силе. Но и здесь работает «золотое правило» – выигрывая в силе, мы во столько же раз проигрываем в пути: продвигая клин на значительное расстояние, мы лишь незначительно приподнимаем груз.

Клин особенно удобен тем, что его можно именно вбивать. Стучать по рычагу не всегда удобно, есть риск сломать его или погнуть. Многие режущие слесарные и столярные инструменты используют принцип клина: стамеска, долото, зубило и др. Они как раз предназначены для того, чтобы по ним стучали. Лезвия ножниц – тоже клинья, но по ним стучать не стоит.

Слабым местом клина является то, что с его помощью можно приподнять груз лишь на несколько сантиметров. Нельзя ли делать клинья подлинней?

Оказывается, можно. Можно сделать клин неограниченной длины. Нужно только закрутить его. Такое устройство называется «винт Архимеда», хотя, возможно, оно было известно ранее и использовалось для подъёма воды в VII в до н.э. в Ниневии – столице Ассирии на берегу реки Тигр. В древности Ниневию называли «Новым Вавилоном» и, возможно, именно в Ниневии, а не в Вавилоне находились легендарные сады Семирамиды, которые греки считали одним из 7 чудес света. Винт Архимеда показан на рис. 15-2. При вращении винта вода устремляется наверх. Эффективность винта не очень велика, поскольку вода может спокойно стекать по спирали вниз и подъём воды будет происходить только при быстром вращении винта.

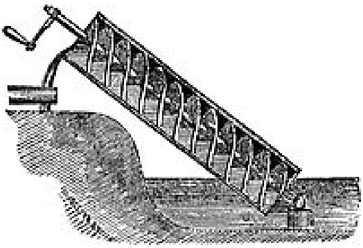


Рис. 15-2.
Винт Архимеда

Архимед предложил использовать «винт Архимеда» не только для подъёма воды, но и для откачки воды из кораблей.

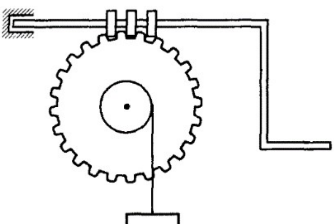


Рис. 15-3.
Червячная передача

Сегодня «винт Архимеда» практически в первоначальном виде применяют в мясорубке для подачи мяса к режущим ножам. Используется он в *червячной передаче*, как показано на рис. 15-3. Она полезна, когда нужна не очень большая скорость подъёма груза, но большой выигрыш в силе.

Современные винтики и болты тоже наследники «винта Архимеда». Закручивая винтик, его можно прижать к поверхности с силой, намного превосходящей силу, прикладываемую к отвёртке. Возможность использовать большую силу сжатия используют в *винтовом прессе*, который появился в XV веке (рис. 15-4).

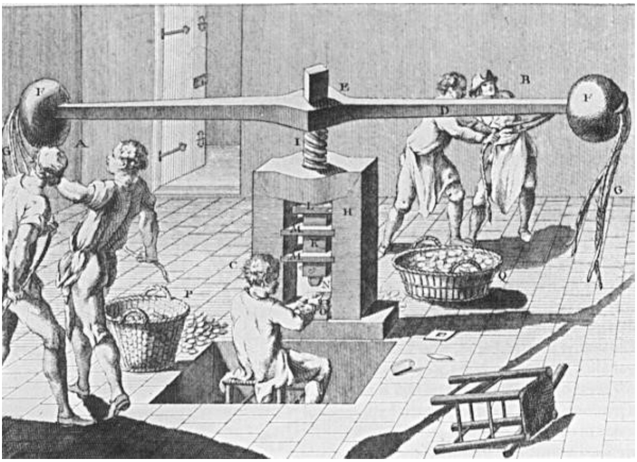


Рис. 15-4.
Винтовой пресс для чеканки монет

Можно ли с помощью винта поднять груз? Одна из разновидностей домкрата использует принцип винта. Он представляет собой винт, который крутят при помощи рычага. Винт, вращаясь, создаёт большую подъёмную силу, способную приподнять не только легковой автомобиль, но и тяжёлый самосвал. Существуют домкраты, с помощью которых можно поднимать целые дома! Разумеется, для домкрата также соблюдается «золотое правило механики».

Домкрат

Глава 16. Другие устройства, увеличивающие силу человека

Предположим, Вам в походе нужно вытащить на берег тяжёлую лодку, а у Вас нет ничего, кроме длинной прочной верёвки. Можно сделать что-то похожее на рычаг, правда, без определённой оси вращения. На берегу необходимо найти большое дерево или что-то столь же прочно стоящее на земле и привязать верёвку, как показано на рис. 16-1. Если одновременно потянуть за середины верёвок в противоположные стороны, то к лодке будет приложена сила, во много раз превосходящая силу, приложенную к верёвке. Здесь получается своеобразный рычаг. Верёвка смещается на большую величину, в то время как лодка продвигается намного меньше. Чтобы полностью вытянуть лодку, верёвку придётся перевязывать несколько раз.

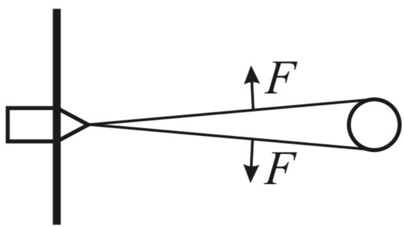


Рис. 16-1.
Как вытащить лодку на берег?

Ещё одно устройство для поднятия тяжестей – *гидравлический пресс*. Он появился относительно недавно – в конце XVIII века. В простейшем исполнении гидравлический пресс состоит из двух цилиндров с поршнями: большим и маленьким (рис. 16-2). Цилиндры соединены узкой трубкой. Вычислим выигрыш в силе гидравлического пресса.

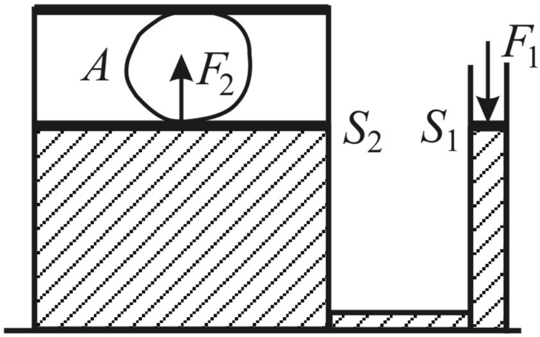


Рис. 16-2.
Гидравлический пресс

Пусть площадь малого поршня S_1, а большого – S_2. Приложим к малому поршню силу F_1. Тогда мы создадим в малом цилиндре давление $p = F_1/S_1$. В гидравлическом прессе используется важнейшее свойство жидкости – она практически несжимаема. Поэтому созданное давление распространится по всей жидкости, в том числе и во второй цилиндр. Значит, такое же давление будет оказано на второй поршень. При этом второй поршень разовьёт силу $F_2 = p\,S_2$. Получился выигрыш в силе:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Чем больше отношение площадей цилиндров – тем большую силу может развить гидравлический пресс. На рис. 16-2 с помощью гидравлического пресса можно сжать заготовку A. Возможности гидравлического пресса ограничены прочностью стенок цилиндров и соединительных трубок. Но при этом здесь также выполняется основное правило механики: выигрывая в силе, мы проигрываем в перемещении.

Поскольку объём жидкости не меняется, то, передвигая первый поршень на глубину h_1, мы вытесним объём жидкости:

$$V = S_1 h_1.$$

В силу несжимаемости жидкости во второй цилиндр поступит точно такой же объём, и второй поршень выдвинется на высоту:

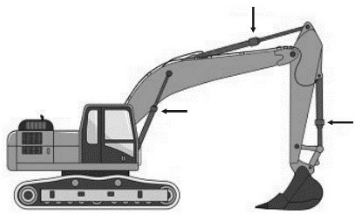
$$h_2 = \frac{V}{S_2} = \frac{h_1 S_1}{S_2}.$$

Таким образом:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Во сколько раз мы выиграли в силе, во столько же раз проиграли в перемещении.

Гидравлический пресс требует аккуратной эксплуатации. Важно, чтобы в жидкость не попал воздух. Даже маленький пузырек, сжимаясь, существенно затруднит работу пресса. Чтобы прессы не ржавели, в них обычно используют не воду, а машинное масло.



Стрелки указывают на гидравлику

Гидравлические прессы широко применяются в технике, в том числе как домкраты. Они используются для подъёма кузовов самосвалов, перемещения ковшей экскаваторов, ножей у бульдозеров... В качестве малых поршней у этих машин используются насосы, нагнетающие масло по прочным трубкам. Длинные цилиндрические поршни у больших цилиндров хорошо видны – они выделяются своим блеском на фоне обычно испачканных в глине частей машин. Блеск поршней обусловлен тонким слоем машинного масла, которым должны быть смазаны поршни гидравлического пресса.

Приложение №1. Пифагоровы тройки

Задача. Найти тройки взаимно простых целых чисел, у которых сумма квадратов двух чисел была бы равна квадрату третьего.

Решение. Подробно решение разобрано в книге Я.И. Перельмана «Занимательная алгебра». Кратко воспроизведём его.

Пусть имеется три натуральных взаимно простых числа a, b и c, таких, что:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Оба числа a и b не могут быть чётными, тогда они не будут взаимно простыми. Покажем, что они не могут быть оба нечётными. Предположим противное, что:

$$a = 2x + 1,$$
$$b = 2y + 1.$$

Тогда: $c^2 = a^2 + b^2 = 4x^2 + 4y^2 + 4x + 4y + 2$.

Получается, что $a^2 + b^2$ делится на 2, но не делится на 4, следовательно, оно не может быть полным квадратом.

Остаётся возможность, что одно число – чётное, а второе – нечётное. Сумма их квадратов будет нечётным числом. Пусть для определённости a – нечётное.

Преобразуем: $a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b)$.

Поскольку числа b и c взаимно простые, причём b – чётное, c – нечетное, то числа $(c - b)$ и $(c + b)$ нечётные и также взаимно простые. Поскольку их произведение является полным квадратом, то каждое из чисел $(c - b)$ и $(c + b)$ также является полным квадратом. Обозначим:

$$c - b = m^2,$$
$$c + b = n^2.$$

Заметим, что m и n являются нечётными.

Решение полученной системы даёт:

$$b = \frac{n^2 - m^2}{2},$$

$$c = \frac{n^2 + m^2}{2}.$$

Отсюда получаем:

$$a^2 = c^2 - b^2 = n^2 m^2.$$

Понятно, что троек может быть бесконечно много. Выпишем некоторые из них:

m	*n*	*a*	*B*	*c*	
1	3	3	4	5	$3^2 + 4^2 = 5^2$
1	5	5	12	13	$5^2 + 12^2 = 13^2$
1	7	7	24	25	$7^2 + 24^2 = 25^2$
1	9	9	40	41	$9^2 + 40^2 = 41^2$
3	5	15	8	17	$8^2 + 15^2 = 17^2$
3	7	21	20	29	$20^2 + 21^2 = 29^2$
5	7	35	12	37	$12^2 + 35^2 = 37^2$

Желающие глубже проникнуть в теорию чисел могут самостоятельно доказать следующие утверждения для пифагоровых троек:

1) длина одного из катетов кратна 3,
2) длина одного из катетов кратна 4,
3) одно из чисел пифагоровой тройки кратно 5.

Приложение №2

Расчёт пути при неравномерном движении с помощью схемы Эйлера

Мы разобрали как вычислять путь при равномерном движении. Можно точно рассчитать путь ещё для некоторых видов движений, например, для равноускоренного. Однако, для многих движений расчёт пройденного пути очень сложен, а иногда и просто невозможен в аналитическом виде. В этом случае можно прибегнуть к приближённому вычислению с использованием *численных методов*. Современные компьютеры позволяют провести расчёты с любой заданной точностью. Простейшим численным методом является схема, созданная немецко-российским математиком Леонардо Эйлером (1707 – 1783), и носящая его имя.

Схемой Эйлера можно пользоваться, если известна зависимость скорости от времени или скорости от пройденного пути.

Разобьем движение на одинаковые интервалы времени Δt. Пусть в начальный момент времени t_1 тело имело координату x_1 и скорость v_1. Координату тела в момент времени $t_2 = t_1 + \Delta t$ найдём по формуле:

$$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t.$$

Координата тела в момент времени $t_3 = t_2 + \Delta t$ будет равна:

$$x_3 = x_2 + v_2 \Delta t = x_1 + v_1 \Delta t + v_2 \Delta t.$$

Продолжая этот алгоритм, для момента времени $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ получим:

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t = x_1 + v_1 \Delta t + v_2 \Delta t + \cdots + v_n \Delta t. \quad (\text{П. } 2.1)$$

Чем меньше интервал времени Δt, тем более точным будет расчёт. Схему Эйлера легко реализовать в виде компьютерной программы и посчитать сотни и тысячи сумм. Блок-схема программы представлена на рис. П.2-1.

Рис. П.2-1. Алгоритм схемы Эйлера

Цикл завершается проверкой условия выхода из цикла: достижение заданного времени или координаты. Алгоритм может быть реализован на любом языке программирования, в электронной таблице *MS Excel* или её свободно распространяемом аналоге *Libre Office*.

Рассмотрим для примера задачу:

Задача. Во время соревнований по бегу Ахиллес за километр до финиша прибавил скорость. На промежутке от 1000 до 600 метров до финиша его скорость менялась по закону: $v = K/x$, где x – расстояние до финиша в метрах, а K – константа, равная 2400 м^2/с. За какое время Ахиллес пробежал дистанцию от 1000 до 600 метров до финиша?

Решение численным методом

Реализуем алгоритм в электронной таблице. Вопрос: какой выбрать интервал времени Δt? Оценим время движения. В начальный момент рассматриваемого отрезка дистанции, за 1000 метров до финиша, скорость Ахиллеса будет 2400/1000 = 2,4 м/с. Далее, на этой дистанции его скорость будет увеличиваться до конечного значения (за 600 метров до финиша): 2400/600 = 4 м/с. Следовательно, он потратит на эти 400 метров меньше 400/2,4 =

167 секунд, но больше 400/4 = 100 секунд. Если выбрать $\Delta t = 0{,}1\ с$,то придётся считать от 1000 до 1670 сумм, что приемлемо для электронной таблицы.

Нам потребуются столбцы:

- A – время;
- B – расстояние до финиша;
- C – скорость Ахиллеса.

В первую строку таблицы удобно заносить название столбцов. Во вторую строку занесём начальные параметры. При составлении таблицы лучше сохранить возможность изменения параметров расчёта. Поэтому отведём ячейку *D*2 для интервала Δt и ячейку *E*2 для коэффициента *K*.

Параметр	Ячейка	Значение
t_1	A2	0
x_1	B2	1000
Δt	D2	0,1
K	E2	2400

Математическая формула	Ячейка	Формула электронной таблицы
$t_{n+1} = t_n + \Delta t$	A3	=A2+D$2
$x_{n+1} = x_n - v_n \Delta t$	B3	=B2-C2*D$2
$v_n = K/x_n$	C2	=E$2/B2

Обращаем внимание, что x – расстояние до финиша, которое всё время уменьшается, поэтому в формуле для координаты стоит знак «–».

Знак «$» означает, что при копировании индекс не меняется. Далее нужно откопировать формулы в ячейках. Для этого надо навести курсор на нижний правый угол ячейки. Курсор превратится в чёрный крестик. Нажать на левую клавишу мыши и потянуть вниз до ячейки 1500. На рис. П.2-2. показан вид получившейся таблицы.

B3 =B2-C2*D$2

	A	B	C	D	E
1	t	x	v	Δt	*K*
2	0	1000	2,4	0,1	2400
3	0,1	999,76	2,4005761		
4	0,2	999,51994	2,4011527		
5	0,3	999,27983	2,4017297		
6	0,4	999,03965	2,402307		
7	0,5	998,79942	2,4028848		
8	0,6	998,55913	2,4034631		
9	0,7	998,31879	2,4040417		
10	0,8	998,07838	2,4046208		
11	0,9	997,83792	2,4052002		
12	1	997,5974	2,4057801		
13	1,1	997,35682	2,4063604		
14	1,2	997,11619	2,4069412		
15	1,3	996,87549	2,4075223		
16	1,4	996,63474	2,4081039		

Рис. П.2-2.
Вид электронной таблицы

Найдём, когда в столбце B величина станет меньше 600. В ячейке B1335 будет значение 600,23, а в ячейке B1336 – значение 599,83. Значение времени преодоления дистанции можно взять из ячейки A1335 или A1336. Оно будет соответственно 133,3 или 133,4 с. Напоминаем, что численные методы дают приближённое решение. Если использовать язык программирования, то нет проблем взять интервал 0,01 с или меньше. В этом случае решение будет точнее, но всё равно нельзя получить точность лучше, чем величина интервала Δt.

Ответ: Ахиллес будет бежать указанную дистанцию больше 133,3 с, но меньше 133,4 с.

Решение графическим методом

Решение задачи с Ахиллесом имеет графическое решение. Выше мы разбирали, что площадь под графиком зависимости скорости от времени численно равна пройденному пути. Если взять график зависимости $1/v$ от x, разбить движение на много маленьких отрезков Δx (рис. П.2-3, слева), то каждый из этих отрезков

Ахиллес будет пробегать за время $\Delta t_i = \Delta x_i / v_i$. Следовательно, площадь каждого заштрихованного прямоугольника будет численно равна времени прохождения отрезка, а площадь под графиком будет численно равна общему времени движения.

В нашем случае зависимости $1/v$ от x будет прямой линией (рис. П.2-3, справа). Следовательно, время движения Ахиллеса между точками B и C численно равно площади трапеции $BCDE$:

$$t = \frac{x_B - x_C}{2}\left(\frac{1}{v_B} + \frac{1}{v_C}\right) = \frac{x_B - x_C}{2}\left(\frac{x_B}{K} + \frac{x_B}{K}\right) = \frac{{x_B}^2 - {x_C}^2}{2K}.$$

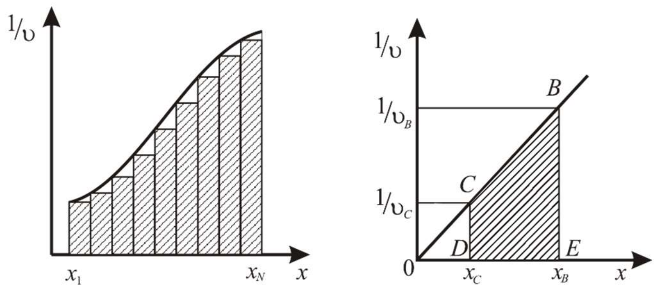


Рис. П.2-3.
Графический способ вычисления времени

В нашем случае $x_B = 1000$, $x_C = 600$. Тогда время движения равно:

$$t = \frac{1000^2 - 600^2}{2 \cdot 2400} = \frac{400}{3} = 133{,}333\ с.$$

Получился тот же ответ, что и в первом решении.

Ответ: Ахиллес будет бежать указанную дистанцию 133,333… с.

Замечание. Графическое решение дало точный ответ. Численное решение дало приблизительный ответ, но численно ответ можно получить практически для любой зависимости скорости от координаты, а графически можно решить только для избранных случаев.

Приложение №3

Расчёт положения центра масс на компьютере

Сегодня, используя возможности компьютеров, можно рассчитать положение центра масс тела любой формы. Рассмотрим для примера нахождения центра масс тонкого полукруга. Поместим полукруг *ABCOA* на ось координат, как показано на рис. П.3-1. Из соображения симметрии центр масс будет лежать на оси *OX*, т.е. $y = 0$.

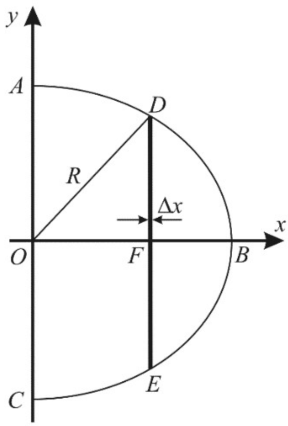


Рис. П.3-1. Нахождение центра масс полукруга

Для нахождения координаты x разобьём полукруг на $N = 100$ полосок шириной:

$$\Delta x = R/N.$$

Координата k-ой полоски: $x_k = k\Delta x - \Delta x/2$.

Длина k-ой полоски:

$$l_k = DE = 2DF = 2\sqrt{R^2 - {x_k}^2}.$$

Площадь k-ой полоски:

$$S_k = 2\sqrt{R^2 - {x_k}^2}\Delta x.$$

Примем плотность единицы поверхности материала полукруга σ. Тогда масса полоски:

$$m_k = \sigma S_k = 2\sigma\sqrt{R^2 - {x_k}^2}\Delta x.$$

Площадь полукруга равна: $S = \pi R^2/2$.

Масса всего полукруга будет: $m = \sigma S = \sigma\pi R^2/2$.

Ранее мы записывали формулу (10.4) для нахождения координаты центра масс x:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}.$$

Составим электронную таблицу. Нам потребуются столбцы:

A – координата полоски
B – длина полоски
C – $m_k x_k$.

В ячейку D2 занесём радиус полукруга, например, 10 см, в E2 – величину Δx. Плотность σ положим равной единице (1 г/см^2). Далее занесём формулы и откопируем до 101 строки. Сумму считаем из ячейки C102, координату центра масс – из ячейки C103.

Параметр	Ячейка	Значение
R	D2	10
Δx	E2	0,1
$x_1 = \Delta x/2$	A2	0,05

Математическая формула	Ячейка	Формула электронной таблицы
$x_{k+1} = x_k + \Delta x$	A3	=A2+E$2
$l_k = 2\sqrt{R^2 - {x_k}^2}$	B2	=2*(D$2^2-A2^2)^0,5
$m_k x_k$	C2	=B2*E$2*A2
$\sum m_k x_k$	C102	=СУММ(C2:C101)
$\frac{2\sum m_k x_k}{\sigma \pi R^2}$	C103	=C102*2/D$2^2/ПИ()

Если всё сделано правильно, то в ячейке C102 получится число 666,847, а в C103 – 4,24528. Таким образом, мы получили, что центр масс отстоит от центра полукруга на 4,24528 см. Остаётся проверить полученное значение экспериментально, подвесив полукруг из бумаги или картона как показано на рис. 10-9.

Заметим, что задача нахождения центра масс полукруга может быть решена точно путём интегрирования. При этом получается ответ:

$$x = \frac{4R}{3\pi} = 4{,}2441\ (\text{см}),$$

что отличается от вычисленного значения на 0,001 см или 0,01 мм. Экспериментально разницу заметить невозможно.

Положение центра масс полукруга или полукольца можно вычислить и без применения интегрирования, что разобрано в книге: Рыжиков С.Б. Беседы и компьютерные расчеты, касающиеся нескольких занимательных задач механики. Часть 5. М.: МГДД(Ю)Т. 2010.